周期材料構造系の隠れた対称性の発見法と超並列化有限要素法

広島大学　正会員　有尾 一郎

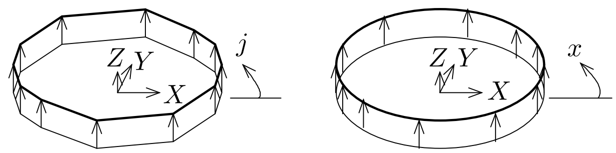
1.　諸 言

古典的な対称性の研究は，静的な現象に対してその対象とする系に対称性が存在するか否かということに力点がおかれてきた．いくつかの動的現象に対して対称性が見え隠れする事実が発見され，数学的な解釈がなされてきた [1),2)]．物理学では，対称性が低下することを「対称性の自発的破れ」あるいは単に「対称性の破れ」[3),4),5)] と呼ばれ，Rayleigh-Bénard 対流や Couette-Taylor の実験がよく知られている [6),7)]．静力学の分野における分岐階層構造の研究は，FUJII・YAMAGUCHI(1980) らの対称性破壊現象の研究によって，系はその対称性の部分群に階層的に支配されていることが明らかにされ，IKEDA・MUROTA [8),9)] や池田・中沢 [10),11)] によって，構造解析に群の標準分解定理を取り入れた群論的分岐理論への展開が行なわれてきた[12)]．

本研究は，この対称性の分岐階層構造を構造工学的見地から調査するために，均質場からの摂動パターンを想定し，対称性の階層的喪失の追跡を行なう．この隠れた対称性の階層構造を確認する方法として，新たな Z 群の直積 (群のテンソル積) による効果的な直交変換を利用し，場の (偏) 微分支配方程式をその対称性を張る空間に変換し，既往のブロック対角化 (BDM) の状況 (ブロック数やサイズなど) によって，隠れた対称性を見つけ出し，対称性の階層レベルを定量的にとらえる方法を取る．この方法は，従来の構造物の幾何学的対称性による BDM とは異なり，新たに均質場からの摂動パターンを動的現象のある段階としてとらえ，周期位相構造における「隠れた対称性」の構造および分岐の系列を見つけ出すことを，本研究のねらいとしている．すなわち，群論的分岐理論における煩雑な解析を行わずに，完全な直交関数列から構成される座標変換によって，境界条件や力学的変形を伴う位相格子系に与え，系の階層的対称性の喪失を変換後の行列表示にてモニターする方法を提案するものである．

2.　直交関数列と群対称性

この章では，ノルム完備な空間を満足する直交関数列を定義した上で，位相空間におけるこの関数列の対称性



(a) $\varphi_Z^{(1,1)_{D_n}}$　　(b) $\varphi_Z^{(1,1)_{D_\infty}}$

Fig. 1　有限群 D_n と無限群 D_∞ の対称性

を利用し，この関数列を間接的に変位関数に適合させる方法を考える．

(1)　節点列の対称性 (有限群の利用)

変位関数 (直交関数列) 上の節点列に対する有限な対称性を考える．Fig.1 のような周期軌道上の変位関数 (三角関数列) を離散化された，節点列の対称性を考えることとする．三角関数が振舞う節点変位の対称群 D_n を考える．全長を単に n 等分割とするとき，これまでの正規長さ x/L $(0 \leq x \leq 2L)$ は節点並びによって $2j/n$ $(j = 1, \cdots, n)$ と置換する．節点列に対応する有限群の対称性は，群作用下の変位関数の直交空間を求める際の組成となる．

3.　位相格子空間の対称性

群の構造は群の直積分解を利用することにより，いくつかの群の組成を知ることができる．この章では，文献 [8)〜11)] を参考に，位相平面上にある支配方程式の「隠れた対称性」を理解するにあたり，群の直積分解を用いることとする．

(1)　有限群の直積表現

この論文での群積は，二面体群の直積 $G = D_n \times D_{\tilde{n}}$ に限定する．この群 G の既約表現全体は

$$R(D_n \times D_{\tilde{n}}) = \{(\mu, \tilde{\mu}) | \mu = (d, i)_{D_n}, \tilde{\mu} = (d, j)_{D_{\tilde{n}}}\} \quad (1)$$

と与えられる．ここに，μ は群 D_n の既約表現を，$\tilde{\mu}$ は別の群 $D_{\tilde{n}}$ の既約表現をそれぞれ表す．群 $D_n \times D_{\tilde{n}}$ の既約表現 $(\mu, \tilde{\mu})$ の次数を Table1 に示す．この $D_n \times D_{\tilde{n}}$

Table 1 群 $D_n \times D_{\tilde{n}}$ の既約表現の次数

$\tilde{\mu}$ or μ	$(1,i)_{D_n}$	$(2,i)_{D_n}$
$(1,j)_{D_{\tilde{n}}}$	1	2
$(2,j)_{D_{\tilde{n}}}$	2	4

Table 2 群積による拡張された既約表現の空間

$\tilde{\mu}$ or μ	$(1,i)_{D_n}$	$(2,i)^+_{D_n}$	$(2,i)^-_{D_n}$
$(1,j)_{D_{\tilde{n}}}$	$X^{(1,i)_{D_n}}_{(1,j)_{D_{\tilde{n}}}}$	$X^{(2,i)^+_{D_n}}_{(1,j)_{D_{\tilde{n}}}}$	$X^{(2,i)^-_{D_n}}_{(1,j)_{D_{\tilde{n}}}}$
$(2,j)^+_{D_{\tilde{n}}}$	$X^{(1,i)_{D_n}}_{(2,j)^+_{D_{\tilde{n}}}}$	$X^{(2,i)^+_{D_n}}_{(2,j)^+_{D_{\tilde{n}}}}$	$X^{(2,i)^-_{D_n}}_{(2,j)^+_{D_{\tilde{n}}}}$
$(2,j)^-_{D_{\tilde{n}}}$	$X^{(1,i)_{D_n}}_{(2,j)^-_{D_{\tilde{n}}}}$	$X^{(2,i)^+_{D_n}}_{(2,j)^-_{D_{\tilde{n}}}}$	$X^{(2,i)^-_{D_n}}_{(2,j)^-_{D_{\tilde{n}}}}$

不変系の空間 X は

$$X^{(\mu)} \bigotimes X^{(\tilde{\mu})} = \bigoplus_{\mu \in R(D_n)} \bigoplus_{\tilde{\mu} \in R(D_{\tilde{n}})} X^{(\mu)} X^{(\tilde{\mu})} \tag{2}$$

と拡張される．ここに $\bigotimes$ は群のテンソル積を表す．$X^{(\mu)}$,$X^{(\tilde{\mu})}$ は群 D_n と $D_{\tilde{n}}$ の既約表現の空間を表す．2 つの群 $D_n, D_{\tilde{n}}$ からなる群元 $\{g \in D_n | g_1, \cdots, g_n\}$, $\{\tilde{g} \in D_{\tilde{n}} | \tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_{\tilde{n}}\}$ の積は

$$g \bigotimes \tilde{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 \\ \vdots \\ \tilde{g}_{\tilde{n}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

の群元作用がある．また，この群元の積からなる表現行列は既約表現 $\mu, \tilde{\mu}$ の表現行列の直積

$$\begin{aligned} T(g \otimes \tilde{g}) &= T(g) \otimes T(\tilde{g}) \\ &= \bigoplus_{\mu \in R(D_n)} \bigoplus_{\tilde{\mu} \in R(D_{\tilde{n}})} T^{(\mu)}(g) \cdot T^{(\tilde{\mu})}(\tilde{g}), \\ &\qquad {}^{\forall} g \in D_n, \quad \tilde{g} \in D_{\tilde{n}} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

として表される．この表現行列を用いて同値変換

$$T(g \otimes \tilde{g}) = H^{\mathrm{T}} T(g \otimes \tilde{g}) H \tag{5}$$

が可能となり，この座標変換行列 H の成分は基底関数列 $\varphi^{(\mu)}, \psi^{(\tilde{\mu})}$ から構成される．

この有限群の直積 $D_n \times D_{\tilde{n}}$ の組成を，第 2 章の直交関数列を用いて記述する．また，この拡張された既約表現の空間を Table2 に示す．2 つの群 $D_n, D_{\tilde{n}}$ の基底関数となる $\varphi^{(\mu)}, \psi^{(\tilde{\mu})}$ が

$$\left\{ \varphi^{(\mu)} \middle| \varphi^{(1,i)_{D_n}}, \cdots, \varphi^{(2,i)_{D_n}}, \cdots \right\},$$
$$\left\{ \psi^{(\tilde{\mu})} \middle| \psi^{(1,j)_{D_{\tilde{n}}}}, \cdots, \psi^{(2,j)_{D_{\tilde{n}}}}, \cdots \right\}$$

と表されるとき，この基底関数列の直積は

$$\varphi^{(\mu)} \bigotimes \psi^{(\tilde{\mu})} = \begin{pmatrix} \varphi^{(1,i)_{D_n}} \\ \vdots \\ \varphi^{(2,i)_{D_n}} \\ \vdots \end{pmatrix} \bigotimes \begin{pmatrix} \psi^{(1,j)_{D_{\tilde{n}}}} \\ \vdots \\ \psi^{(2,j)_{D_{\tilde{n}}}} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{6}$$

の通りの関数列が存在することになる．この基底関数の直積を各節点に対応させた成分からなる既約表現 $(\mu, \tilde{\mu})$ の座標変換行列は

$$\begin{aligned} H^{(\mu,\tilde{\mu})} &= \left[\cdots, \left(\varphi^{(\mu)} \psi^{(\tilde{\mu})} \right)^{\mathrm{T}}, \cdots \right]^{\mathrm{T}}, \\ H &= \left[\cdots, H^{(\mu,\tilde{\mu})}, \cdots \right], \ \mu \in R(D_n) \ \cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

とする．

(2) 群同変条件式

ところで，この H はユニタリーな行列であり，

$$H^{\mathrm{T}} H = \mathrm{I}$$

と単位行列となる．2 変数関数 $w(x,y)$ を未知関数とする偏微分方程式 $F(w)$ が表現行列 $T(g \otimes \tilde{g})$ に対して

$$T(g \otimes \tilde{g}) F(w) = F(T(g \otimes \tilde{g}) w) \tag{8}$$

の群同変条件が成り立つとき，BDM が可能となる．この BDM の座標変換によって既約表現毎にブロック分解すると，

$$H^{\mathrm{T}} F(w) = F(H^{\mathrm{T}} w) \tag{9}$$

と変換される．この同値変換によって関数 $w(x,y)$ の隠れた対称性を調べることができる．

4. 群論的変分原理の応用

(1) 群論的変分原理を Poisson 方程式に適用

対称な領域 e における対称な境界条件 $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ on C^* を持つポアソン方程式の汎関数

$$U_e(\widehat{\boldsymbol{u}}) = \int_{V_e} \left\{ \frac{\kappa}{2} \sum_{x,y \in \Psi} \left(\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial \Psi} \right)^2 - \boldsymbol{f} \widehat{\boldsymbol{u}} \right\} dV_e \tag{10}$$

を考える。変分 $\delta \widehat{\boldsymbol{u}}$ を用いると δU_e は

$$\begin{aligned} \delta U_e &= U_e(\widehat{\boldsymbol{u}} + \delta \widehat{\boldsymbol{u}}) - U_e(\widehat{\boldsymbol{u}}) \\ &= -\int_{V_e} \kappa \sum_{x,y \in \Psi} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial \Psi^2} \right) + \boldsymbol{f} \, \delta \widehat{\boldsymbol{u}} \, dV_e \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{V_e} \kappa \sum_{x,y \in \Psi} \left(\frac{\partial \delta \widehat{\boldsymbol{u}}}{\partial \Psi} \right)^2 dV_e \ \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

となる。

パラメータ α を含む関数

$$T(g) \boldsymbol{u}(x,y) \equiv T(g) \boldsymbol{v}(x,y) + \alpha T(g) \boldsymbol{v}(x,y) \tag{12}$$

を考える。積分 $T(g) U_e(\boldsymbol{v} + \alpha \boldsymbol{v})$ を α の関数とすれば $\alpha = 0$ において U_e が最小となる条件より

$$\frac{\partial U_e}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} T(g) U_e(\boldsymbol{v} + \alpha \boldsymbol{v}) \Big|_{\alpha=0} = 0 \tag{13}$$

が得られる。式 (12) を式 (10) に代入すると

$$U_e = \int_{V_e} \left\{ \frac{\kappa}{2} \sum_{x,y\in\Psi} \left(\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial \Psi} + \alpha \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial \Psi} \right)^2 - \boldsymbol{f}\widehat{\boldsymbol{v}} \right\} dV_e$$

より

$$\frac{\partial U_e}{\partial \alpha} = \int_{V_e} \left\{ \kappa \left(\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial x}\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial y}\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial y} \right) - \boldsymbol{f}\widehat{\boldsymbol{v}} \right\} dV_e = 0$$

が得られる。これをグリーン・ガウスの定理より部分積分を行うと，最終的に $\widehat{\boldsymbol{v}}$ は任意の関数であるので

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{\boldsymbol{v}}}{\partial y^2} \right) + \boldsymbol{f} = 0, \quad \text{in} \quad V_e \tag{14}$$

が成立する。この微分方程式はオイラーの方程式であり，式 (10) を最小にする関数 $\widehat{\boldsymbol{v}}(x,y)$ の必要条件はこのオイラーの方程式を満足するものである。

(2) 位相格子の対称性

この節では有限群の直積によって格子上の関数の対称性を表現し，格子は 2 次元の節点列の対称性を利用することとする．完全な格子の対称性を記述するために，周期的な境界を持たせた位相空間[1] を考えた上で，これをすべて固有の対称性を張る空間へ変換後に境界条件を導入する方法を採用する．すなわち，境界条件は 2 次的要因による制約された対称条件として取り扱うこととする．

周期 2π に正規化された位相領域

$$\left\{ \left(\frac{2\pi x}{L_x}, \frac{2\pi y}{L_y} \right) \in \mathbf{R}^2 \,|0 \le x \le L_x, 0 \le y \le L_y \right\} \tag{15}$$

に平面格子を導入する．ここに，L_x, L_y は x, y 方向の長さを表す．平面上の格子点 (p,q) $(p = 1,\cdots,n,\ q = 1,\cdots,\tilde{n})$ を設定すると，格子間隔は $h = 2\pi/n, \tilde{h} = 2\pi/\tilde{n}$ となり，$n, \tilde{n}$ はそれぞれ x, y 方向の分割数である．したがって，離散化された格子座標は

$$\left\{ \left(\frac{2\pi p}{n}, \frac{2\pi q}{\tilde{n}} \right) \in \mathbf{R}^2 \,|1 \le p \le n, 1 \le q \le \tilde{n} \right\} \tag{16}$$

と設定できる．格子座標 $(ph, q\tilde{h})$ の任意関数が二重の直交関数列

$$w_{p,q} \equiv w\left(ph, q\tilde{h}\right) = u\left(\frac{2\pi p}{n}\right) \times u\left(\frac{2\pi q}{\tilde{n}}\right)$$

として表されるとき，上式は

$$\begin{aligned} w_{p,q} &= \sum_{\mu\in R(D_n)} a^{(\mu)}\varphi^{(\mu)}|_{j=p} \times \sum_{\tilde{\mu}\in R(D_{\tilde{n}})} b^{(\tilde{\mu})}\psi^{(\tilde{\mu})}|_{j=q} \\ &= \sum_{\mu\in R(D_n)} \sum_{\tilde{\mu}\in R(D_{\tilde{n}})} a^{(\mu,\tilde{\mu})}\varphi_p^{(\mu)}\psi_q^{(\tilde{\mu})} \quad \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{17}$$

と分解できる．ここに，$a^{(\mu,\tilde{\mu})}$ は既約表現 $(\mu,\tilde{\mu})$ に対する未定係数である．例えば，式 (17) の左辺が既知な関数であれば，(p,q) に対する支配方程式は

$$F_{p,q} \equiv \sum_{\mu\in R(D_n)} \sum_{\tilde{\mu}\in R(D_{\tilde{n}})} a^{(\mu,\tilde{\mu})}\varphi_p^{(\mu)}\psi_q^{(\tilde{\mu})} - w_{p,q} = 0$$

[1] このモデルは左右および上下の端節点を巡回させた位相構造とする．

と表される．ここに，$w_{0,q} = w_{n,q}, w_{p,0} = w_{p,\tilde{n}}$ に対応する．これをすべての格子点について方程式を組立てれば，以下のような連立方程式を得る．

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & A_{p,q}^{(\mu,\tilde{\mu})} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ a^{(\mu,\tilde{\mu})} \\ \vdots \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ w_{p,q} \\ \vdots \end{array} \right\}$$

ここに，$A_{p,q}^{(\mu,\tilde{\mu})}$ は $\varphi_p^{(\mu)}\psi_q^{(\tilde{\mu})}$ である．したがって，未定係数 $a^{(\mu,\tilde{\mu})}$ は Gauss の消去法などの数値計算によって求めることが可能である．行列 A は方程式 $F(w)$ 中の関数 w の対称性 (直交関数列) に依存することがわかる．例えば，関数 w が一定値や二重フーリエ級数系であれば A は対角行列となり，関数 w が非対称であれば A は密で連成された行列となる．

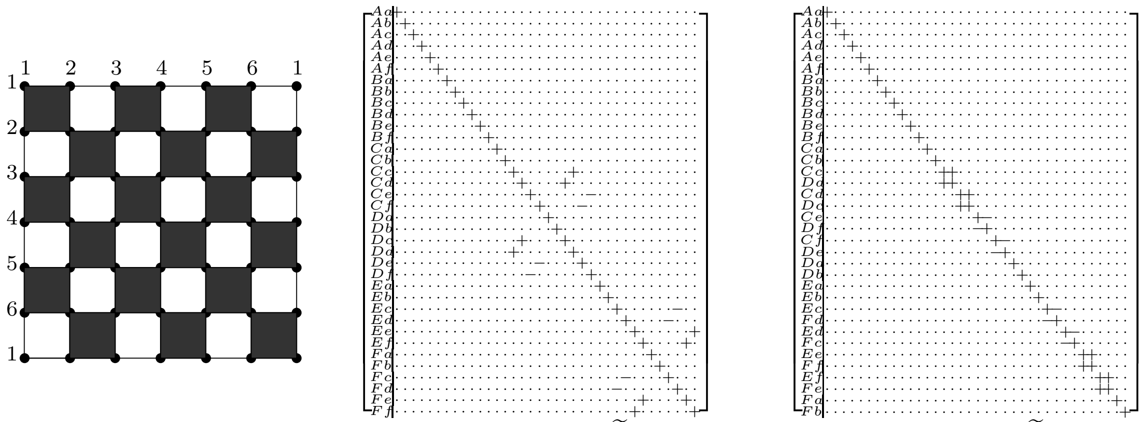
5. 「隠れた対称性」の数値計算

均質場における「隠れた対称性」の存在と，均質領域が分岐にともないパターンを形成しながら系が乱れていくことを文献 9)は指摘した．この章では，均質な位相格子モデルにおける剛性分布パターンと位相対称性との関係を，剛性方程式のブロック対角化行列 $\widetilde{K}^{(\mu)}$ の直交性によって，この「隠れた対称性」を数値的にとらえることを試みる．

(1) 格子構造の隠れた対称性

ここでは，均質場の離散化を伴う要素解析は場の位相構造に依存し，この位相構造から周期パターン変形が形成されるものとして，その階層的な対称性を探ることとする．均等に分割された格子上の 8 隣接の部材剛性をモデル化し，均質な剛性分布を持つ構造の面外変位を自由度 (1 節点 1 自由度) として有限要素解析を行なった．

Fig.2(a) のように閉じた位相格子空間の構造と対称性を考える．この格子構造は市松模様のような剛性分布を持ち，帯行列化された K を形成する．一方，座標変換された $\widetilde{K}$ を Fig.2(b) に示す．図中の + は正値を，− は負値を，· はゼロ成分をそれぞれ表す．このとき，$\widetilde{K}$ はほぼ対角化された行列となり，複数のブロックで類似する成分構成になった．このことは，この構造の剛性行列が線形独立な既約表現と一致し，この離散構造では最も対称位数が高い構造となった．Fig.2(c) からも明らかのように，成分を整理すると，この対称性は，1 次元の D_{28} 不変配下の群と等価な群を持つ．このことは BDM によるブロックの数が並列 FEM 解析が可能となり，自由度の空間が大きくなるような 3 次元空間の対称性が高い格子モデルは超並列解析のパフォーマンスは大変大きくなることを意味する。対称性の高低を表すことを利用し，対称性の階層構造を調べる手法を取る．したがって，このような位相格子構造となる大規模な離散系では対称性



(a) 市松模様の剛性分布　(b) BDM 前の $\widetilde{K}$　(c) BDM 後 $\widetilde{K}$

Fig. 2 市松模様の剛性分布の対称性と BDM 行列表現化

の利用価値が高められることになる.

6. 結　論

本結果より，均質場の分岐階層構造には，パターン化された位相格子構造の群論的な変換則を用いることによって，その構造系が持つ隠れた対称性と階層的な対称性の仕組みが不変的に介在することが明らかになった.

謝辞:

本研究は，平成 22 年度-24 年度科学研究費挑戦的萌芽研究の助成に深謝する。

参考文献

1) Field, M. and Golubitsky, M.：Symmetric chaos, *Computers in Physics*,4(5),pp.470-479, 1990.
2) Stewart, I. and Golubitsky, M. : Fearful Symmetry, *Blackwell Publishers by arrangement with Penguin Books Limited*,1992.
3) Nambu, Y.： Dynamical Symmetry Breaking, *Evolutionary trends in the phisical sciences, Springer proceedings in physics*, 57, 1991.
4) Lauterbach, R.：Forced Symmetry Breaking from O(3), *Int. Series of Num. Math.*, 104, 1992.
5) Kondepudi,D.：State selection in symmetry-breaking transitions, *Nonlinear Dynamical Systems*,2, Cambridge University Press, 1989.
6) Bénard, H.： Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Gén. Sci. Pure Appl.* 11,pp.1261-1271,1309-1328, 1900.
7) Rayleigh, J.W.S.：On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.*,32(6),pp.529-546, 1916.
8) Ikeda, K., Murota, K. and Nakano,M. : Echelon modes in uniform materials, *Int. J. of Solids and Structures*, 31(19), pp.2709-2733, 1994.
9) Ikeda, K., Murota, K. : Recursive Bifurcation as Sources of Complexity in Soil Shearing Behavior, *Soils and Foundations*, 37(3), pp.17-29, 1997.
10) Ikeda,. K., Nakazawa, M. and Wachi, S. : Degeneration of bifurcation hierarchy of a rectangular plate due to boundary conditions, *Structural Eng. / Earthquake Eng., JSCE*, 13(1), pp.43s-54s,1996.
11) 池田 清宏・中沢 正利・水木 麻雄：周期境界を持つ長方形領域の分岐パターン解析, 土木学会構造工学論文集, Vol. 44A, pp.275-284, 1998.
12) 有尾 一郎：群積による直方体ソリッド要素の剛性行列のブロック対角化法, 土木学会応用力学論文集, Vol. 1, 1998.