断面変化を有するせん断梁の動的特性の導出

鳥取大学大学院　学生会員　○奥井大輔
鳥取大学大学院　正会員　　谷口朋代

１．はじめに

本研究では，構造物の損傷が固有振動数や振動形と呼ばれる構造物の動的特性の変化に及ぼす影響について検討を行い，動的特性の変化を利用して構造物の損傷を探査する方法の実現可能性について考察する．そこで，構造物のひび割れなどの損傷をモデル化した凹型のせん断梁と，損傷の無い構造物をモデル化した一様なせん断梁の動的特性を数学的に求めて比較することとした．

２．動的特性の導出

本研究では，図-１に示す長さLで一様な幅W_0かつ単位奥行きを有する片持ち状のせん断梁（片側固定・片側自由）を損傷の無い構造物と見なした．一方，図-２に示すように$x=L_0$の位置にひび割れ幅L_1，ひび割れ深さW_0-W_1を有するせん断梁を損傷のある構造物と見なした．まず，図-１に示す損傷の無いせん断梁の動的特性を求める．図-１の微小区間dxに作用するせん断力の差より，よく知られた波動方程式を得る．

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)=\frac{G}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \qquad (1)$$

G：せん断梁のせん断弾性係数，　ρ:せん断梁の密度．

式(1)を，分離定数$-\omega^2$を用いて空間座標$Y(x)$と時間座標$F(t)$を表す常微分方程式に変数分離する．

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2}+\omega^2F(t)=0 \qquad (2a)$$

$$\frac{d^2Y(x)}{dx}+\omega^2\frac{\rho}{G}Y(x)=0 \qquad (2b)$$

ここで，$\beta_0^2=\omega^2\rho/G$とおくと，振動形の一般解は以下のように表される．

$$Y(x)=C_1\cos\beta_0 x+C_2\sin\beta_0 x \qquad (3)$$

C_1, C_2:積分定数. 式(3)に境界条件，$Y(0)=0$，$dY(L)/dx=0$を与えることで，一様なせん断梁の動的特性が求められる．

n次の固有振動数；

$$\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{G}{\rho L^2}} \qquad (n=1,2\cdots) \qquad (4)$$

n次の振動形；

$$Y_n(x)=C_{2n}\sin\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right\} \qquad (n=1,2\cdots) \qquad (5)$$

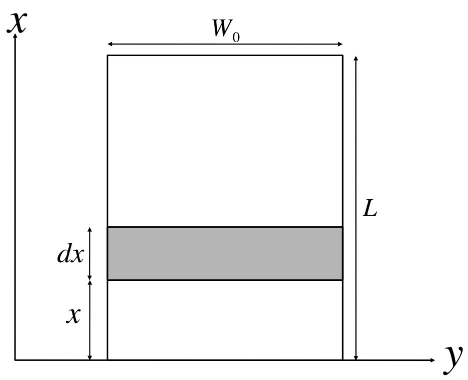

図-１　損傷の無い構造物

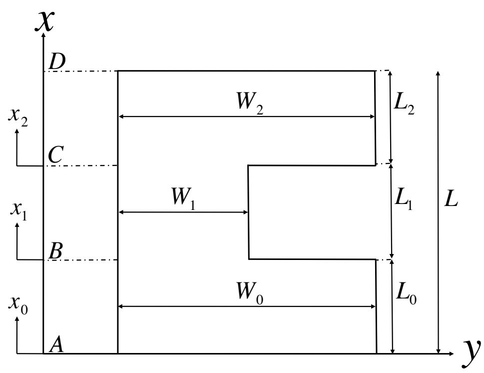

図-２　損傷のある構造物

次に，図-２に示す凹型断面を有するせん断梁の動的特性を求める．梁の長さ方向にAB，BC，CDの３つの区間から成る一様なせん断梁の組み合わせと考えることで，各区間において振動形を表す式を得る．

$$AB:Y_0(x_0)=C_1\cos\beta_0x_0+C_2\sin\beta_0x_0 \qquad (6a)$$

$$BC:Y_1(x_1)=C_3\cos\beta_1x_1+C_4\sin\beta_1x_1 \qquad (6b)$$

$$CD:Y_2(x_2)=C_5\cos\beta_2x_2+C_6\sin\beta_2x_2 \qquad (6c)$$

ここで，　$\beta_0=\beta_1=\beta_2=\omega\sqrt{\rho/G}$である．

式(6)に，各区間の境界で変位とせん断ひずみが連続となるよう境界条件を与える[1]．

$$A:Y_0(0)=0 \qquad (7a)$$

$$B:Y_0(L_0)=Y_1(0),\quad dY_0(L_0)/dx_0=dY_1(0)/dx_1 \qquad (7b)$$

$$C:Y_1(L_1)=Y_2(0),\quad dY_1(L_1)/dx_1=dY_2(0)/dx_2 \qquad (7c)$$

$$D:dY_2(L_2)/dx_2=0 \qquad (7d)$$

これより，凹型せん断梁の振動数方程式が得られる．

$$\delta_0\delta_2 \tan(\beta L\eta_1)\tan(\beta L\eta_2)+\delta_1\delta_2 \tan(\beta L\eta_0)\tan(\beta L\eta_2) + \delta_1^2 \tan(\beta L\eta_0)\tan(\beta L\eta_1)=\delta_0\delta_1 \tag{8}$$

ここで，L：梁全長，$\delta_0 = W_0/W_0$，$\delta_1 = W_1/W_0$，$\delta_2 = W_2/W_0$，$\eta_0 = L_0/L$，$\eta_1 = L_1/L$，$\eta_2 = L_2/L$ である．また，$\beta = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \omega\sqrt{\rho/G}$ なので，式(8)の βL を満たす値を α とすると，固有振動数は $\omega = \alpha\sqrt{G/\rho L^2}$ と表すことができる．

また，各区間の振動形は以下のように表すことができる．

$$AB: Y_0(x_0) = C_3\left\{\frac{1}{\sin(\beta L\eta_0)}\sin\beta L\frac{x_0}{L}\right\} \tag{9a}$$

$$BC: Y_1(x_1) = C_3\left\{\cos\left(\beta L\frac{x_1}{L}\right) + \frac{\delta_0}{\delta_1}\frac{1}{\tan(\beta L\eta_0)}\sin\left(\beta L\frac{x_1}{L}\right)\right\} \tag{9b}$$

$$CD: \begin{aligned} Y_2(x_2) &= C_3\left\{\cos(\beta L\eta_1) + \frac{\delta_0}{\delta_1}\frac{\sin(\beta L\eta_1)}{\tan(\beta L\eta_0)}\right\} \\ &\cdot\left\{\cos\left(\beta L\frac{x_2}{L}\right) + \tan(\beta L\eta_2)\sin\left(\beta L\frac{x_2}{L}\right)\right\}\end{aligned} \tag{9c}$$

C_3:積分定数.

3．結果と考察

梁全長 $L = 3.0m$，幅 $W_0 = 1.0m$ のせん断梁を考える．この梁の固定端側から $L/5$ の位置に，ひび割れ幅 $L_1 = 1mm$，ひび割れ深さ $1mm$，$250mm$，$500mm$ の３通りのひび割れが生じたとする．図-3 はモード次数と損傷の無い場合の固有振動数に対する損傷がある場合のそれとの比を示している．本図より，ひび割れ深さが深くなる程，固有振動数比は大きくなるが，ひび割れ幅 $1mm$，ひび割れ深さ $500mm$ という目で見て分かるような大きな損傷であっても，固有振動数比は約 6/10000 しか変わらないことが分かる．これより，ひび割れが固有振動数に与える影響は非常に小さいと言える．一方，図-4 は，損傷がある場合の振動形と損傷が無い場合のそれとの比と，その位置を示している．ここで，損傷の有無が振動形に及ぼす影響はほとんどなく，振動形比は梁の全域に亘ってほぼ 1.0 となるが，損傷のある部分のみ差が生じるので図-4 は，その部分を拡大して表示している．本図より，ひび割れ深さが深くなるほど振動形比も大きくなるが，前述のような大きな損傷であっても振動形比は約 1% しか変わらないことが分かる．この変化の理由として，ひび割れが存在する箇所では断面形状が急変するため波の伝わり方が変化するため，振動形比の値が変化したと考えられる．また，ひび割れ位置を固定端側から $L/2$，$L/3$，$2L/3$ で仮定した場合にも同様の結果となった．以上より，ひび割れが固有振動数や振動形に与える影響は極微小である．よって，加速度計などの振動現象を計測する機器の計測精度を考えれば，固有振動数や振動形などの動的特性は，損傷の有無やその程度を敏感に反映する指標には成り得ないことが分かる．

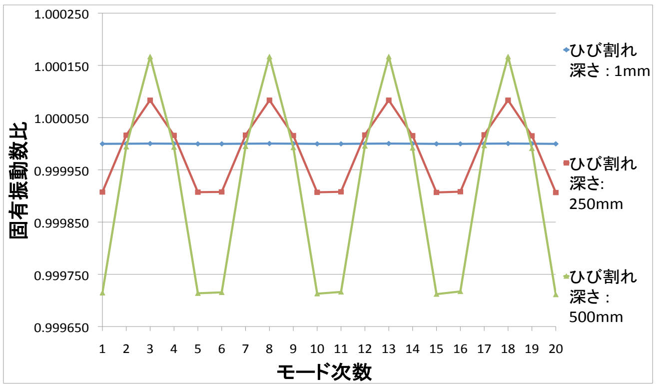

図-３　モード次数と固有振動数比

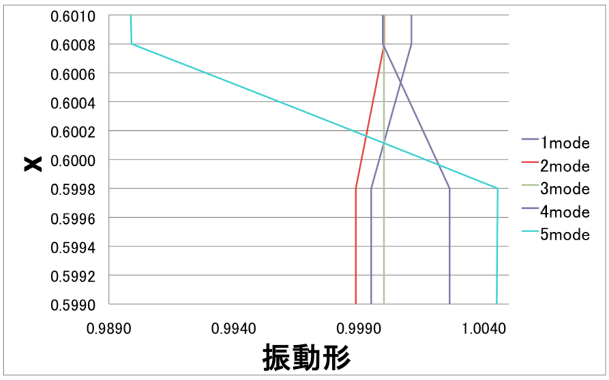

図-４a　ひび割れ深さ：500㎜

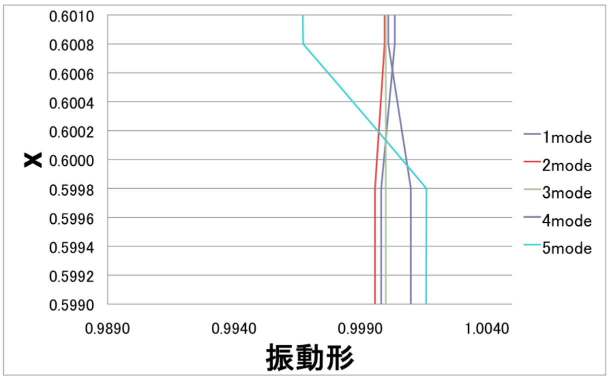

図-４b　ひび割れ深さ：250㎜

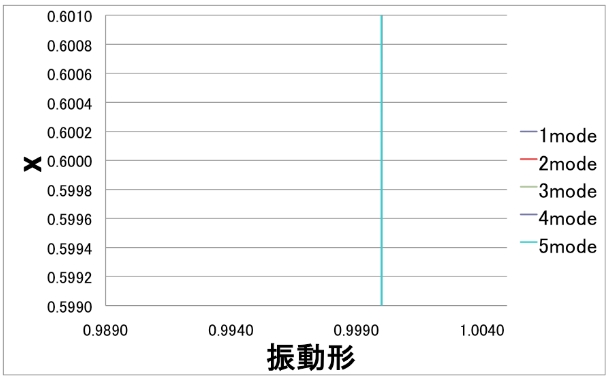

図-４c　ひび割れ深さ：1㎜

図-４　振動形比

4．参考文献

1. Jagmohan L. Humar: *DYNAMICS OF STRUCTURES*, pp.630 - 631, pp.680 - 689, Prentice Hall.