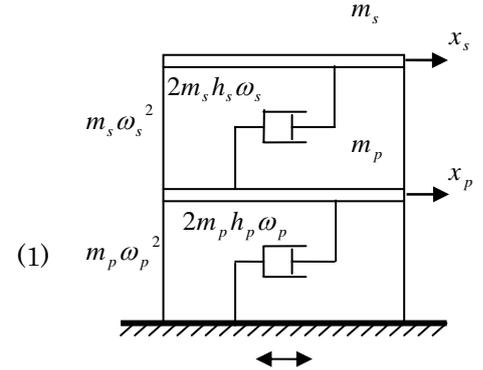


## 1. はじめに

2自由度以上の自由度を有する振動系においては、近似的に減衰マトリクスの非対角項を無視し、モーダルマトリクスの直交性を用いて、構造物の運動方程式を非連成化して解を求めることが一般的である。しかし、各次モードの固有振動数が近接する場合などには、減衰を介する連成が顕著になり減衰マトリクスの非対角項を無視できなくなると予想される。そこで、減衰マトリクスの非対角項の影響を考慮した近似式を導出し、その適用範囲と解析精度について検討する。

## 2. 解析方法

最も単純な多自由度系モデルとして、図-1に示すよう2自由度バネ一質点系を考え、ホワイトノイズ状の地動加速度 $\ddot{z}$ に対する応答を求める。解析モデルの運動方程式は、次式で与えられる。



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{z}$$

$$\therefore \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2m_p h_p \omega_p + 2m_s h_s \omega_s & -2m_s h_s \omega_s \\ -2m_s h_s \omega_s & 2m_s h_s \omega_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} m_p \omega_p^2 + m_s \omega_s^2 & -m_s \omega_s^2 \\ -m_s \omega_s^2 & m_s \omega_s^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \omega_i: i \text{ 層の固有円振動数} \quad h_i: i \text{ 層の減衰定数}$$

図-1 解析モデル

ここで、 $\mathbf{x} = [x_p \quad x_s]^T$ は、変位ベクトルであり、応答変位のパワースペクトル密度関数は、次式で求められる。

$$\Phi_{xx}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{M}\mathbf{1}\Phi_{\ddot{z}}(\omega)\mathbf{1}^T \mathbf{M}^T \mathbf{H}(\omega)^{*T} \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = [-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1} \quad (3)$$

ここで、 $\Phi_{\ddot{z}}(\omega)$ は地震加速度のパワースペクトル密度関数であり、強度 $S_p$ のホワイトノイズとする。また、アスタリスクは共役複素数を示す。(2)式より、1層目と2層目の変位 $x_p(t)$ および $x_s(t)$ の分散は、それぞれ以下のように与えられる。

$$\sigma_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{x_p x_p}(\omega) d\omega \quad \sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{x_s x_s}(\omega) d\omega \quad (4)$$

ここで、 $\Phi_{x_p x_p}(\omega)$ と $\Phi_{x_s x_s}(\omega)$ は、 $\Phi_{xx}(\omega)$ の対角要素である。(4)式の値は数値解析により求めた。

一方、(2)式の近似解について考える。2自由度系の定常応答の特解が $\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}_n(i\omega)e^{i\omega t}$ で与えられると仮定し、(1)式に代入して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + 2i\zeta_1 \omega_1 \omega + \omega_1^2 & i\omega \zeta_{12} \\ i\omega \zeta_{21} & -\omega^2 + 2i\zeta_2 \omega_2 \omega + \omega_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{H}_n(i\omega) = - \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \ddot{z} \quad (5)$$

ここで、 $\omega_j: j$ 次モードの固有円振動数  $h_j: j$ 次モードの減衰定数  
 $\eta_j: j$ 次モード刺激係数  $H_n(i\omega):$ 伝達関数

(5)式の  $\mathbf{H}_n(i\omega)$  の係数の逆行列を  $\mathbf{A}$  とすると、

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(-\omega^2 + 2i\zeta_1\omega_1\omega + \omega_1^2)(-\omega^2 + 2i\zeta_2\omega_2\omega + \omega_2^2) - \{(i\omega\zeta_{12})(i\omega\zeta_{21})\}} \begin{bmatrix} -\omega^2 + 2i\zeta_2\omega_2\omega + \omega_2^2 & -i\omega\zeta_{12} \\ -i\omega\zeta_{21} & -\omega^2 + 2i\zeta_1\omega_1\omega + \omega_1^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\mathbf{A}$  を数学的に求めるのは困難である。そこで、 $\zeta_{12}, \zeta_{21}$  の値は微小であり無視しても誤差は小さいと考え、(6)式の行列式部分の  $\{ \}$  内を無視して次式を得る。

$$\mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} H_1(i\omega) & i\omega\zeta_{12}H_1(i\omega)H_2(i\omega) \\ i\omega\zeta_{21}H_1(i\omega)H_2(i\omega) & H_2(i\omega) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{ここで } H_1(i\omega) = \frac{1}{\omega_1^2 \{1 - (\omega/\omega_1)^2 + 2i\zeta_1(\omega/\omega_1)\}} \quad H_2(i\omega) = \frac{1}{\omega_2^2 \{1 - (\omega/\omega_2)^2 + 2i\zeta_2(\omega/\omega_2)\}}$$

これらの近似より、2自由度系の応答変位の共分散マトリクス  $\sigma^2_{xx}$  は次式で近似される。

$$\sigma^2_{xx} = S_p \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} H_1^*(i\omega) & -i\omega\zeta_{12}H_1^*(i\omega)H_2^*(i\omega) \\ -i\omega\zeta_{21}H_1^*(i\omega)H_2^*(i\omega) & H_2^*(i\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} H_1(i\omega) & -i\omega\zeta_{21}H_1(i\omega)H_2(i\omega) \\ -i\omega\zeta_{12}H_1(i\omega)H_2(i\omega) & H_2(i\omega) \end{bmatrix} d\omega \quad (8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d\omega \times S_p \quad (9)$$

$$a = \eta_1^2 H_1(i\omega)H_1^*(i\omega) - i\omega\eta_1\eta_2\zeta_{12}H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega) - i\omega\eta_1\eta_2\zeta_{12}H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2^*(i\omega) - \omega^2\eta_2^2\zeta_{12}^2H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) \quad (9)$$

$$b = \eta_1\eta_2H_1^*(i\omega)H_2(i\omega) - i\omega\eta_1^2\zeta_{21}H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega) - i\omega\eta_2^2\zeta_{12}H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) - \omega^2\eta_1\eta_2\zeta_{12}\zeta_{21}H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) \quad (10)$$

$$c = \eta_1\eta_2H_1(i\omega)H_2^*(i\omega) - i\omega\eta_2^2\zeta_{12}H_1(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) - i\omega\eta_1^2\zeta_{21}H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2^*(i\omega) - \omega^2\eta_1\eta_2\zeta_{12}\zeta_{21}H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) \quad (11)$$

$$d = \eta_2^2H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) - i\omega\eta_1\eta_2\zeta_{21}H_1(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) - i\omega\eta_1\eta_2\zeta_{21}H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) - \omega^2\eta_1^2\zeta_{21}^2H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega) \quad (12)$$

ここで、留数定理を用いて<sup>1)</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_1^*(i\omega)H_1(i\omega)d\omega = \frac{\pi}{2\omega_1^3\zeta_1} \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_2^*(i\omega)H_2(i\omega)d\omega = \frac{\pi}{2\omega_2^3\zeta_2} \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)d\omega = \frac{4\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2 - 2\zeta_2^2\omega_2^2 - 2\zeta_1\zeta_2\omega_1\omega_2)^2 + 4\omega_2^2(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)^2(1 - \zeta_2^2)} \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_1(i\omega)H_2^*(i\omega)d\omega = \frac{4\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2 - 2\zeta_1^2\omega_1^2 - 2\zeta_1\zeta_2\omega_1\omega_2)^2 + 4\omega_1^2(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)^2(1 - \zeta_1^2)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & i \int_{-\infty}^{\infty} \omega H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2^*(i\omega)d\omega \\ &= \frac{\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{\zeta_1\omega_1(4\omega_2^2\zeta_1^2\omega_1^2 + 4\zeta_2\omega_2^3\zeta_1\omega_1 + \omega_2^4 + 4\omega_1^3\zeta_1\zeta_2\omega_2 - 2\omega_1^2\omega_2^2 + 4\omega_1^2\zeta_2^2\omega_2^2 + \omega_1^4)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & i \int_{-\infty}^{\infty} \omega H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega)d\omega \\ &= \frac{\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{\zeta_2\omega_2(4\omega_1^2\zeta_2^2\omega_2^2 + 4\zeta_1\omega_1^3\zeta_2\omega_2 + \omega_1^4 + 4\omega_2^3\zeta_2\zeta_1\omega_1 - 2\omega_2^2\omega_1^2 + 4\omega_2^2\zeta_1^2\omega_1^2 + \omega_2^4)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & i \int_{-\infty}^{\infty} \omega H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)d\omega \\ &= \frac{-\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{\zeta_1\omega_1(4\omega_2^2\zeta_1^2\omega_1^2 + 4\zeta_2\omega_2^3\zeta_1\omega_1 + \omega_2^4 + 4\omega_1^3\zeta_1\zeta_2\omega_2 - 2\omega_1^2\omega_2^2 + 4\omega_1^2\zeta_2^2\omega_2^2 + \omega_1^4)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & i \int_{-\infty}^{\infty} \omega H_1(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega)d\omega \\ &= \frac{-\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{\zeta_2\omega_2(4\omega_1^2\zeta_2^2\omega_2^2 + 4\zeta_1\omega_1^3\zeta_2\omega_2 + \omega_1^4 + 4\omega_2^3\zeta_2\zeta_1\omega_1 - 2\omega_2^2\omega_1^2 + 4\omega_2^2\zeta_1^2\omega_1^2 + \omega_2^4)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 H_1(i\omega)H_1^*(i\omega)H_2(i\omega)H_2^*(i\omega)d\omega \\ &= \frac{\pi(\zeta_1\omega_1 + \zeta_2\omega_2)}{2\zeta_1\omega_1\omega_2\zeta_2(4\zeta_2^2\omega_2^2\omega_1^2 + 4\zeta_2\omega_2^3\zeta_1\omega_1 + 4\zeta_1^2\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^4 + 4\zeta_2\omega_2\zeta_1\omega_1^3 - 2\omega_2^2\omega_1^2 + \omega_1^4)} \end{aligned} \quad (21)$$

(13)式～(21)式を(8)式に代入すると、共分散マトリクスの特角項が、1層目と2層目の変位  $x_p(t)$  と  $x_s(t)$  の分散の近似解となる。

### 3. 解析結果

(4)式より求められる応答変位を目標値として、提案する(8)式による応答変位の近似の精度について検討した。今回提案した近似式の適用範囲と精度を明らかにするために、家屋などの2層建築物、一般的な免震構造、橋脚～免震～橋梁連成系、TMDを付加した構造物の4種類の構造物を例に解析する。想定した各構造物の第一層、第二層の減衰定数  $h_p, h_s$ 、質量比  $\varepsilon = m_s/m_p$  を与えて、近似式の解析精度を検討した。図2～5の各グラフの縦軸は、目標値と近似式による値の比、または目標値と(5)式で減衰の非対角項を無視した場合の値の比を表わす応答比であり、横軸は次式で定義する振動数比である。

$$\beta = \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_{ave}} \quad \because \quad \omega_{ave} = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} \quad (22)$$

ここで、一般的な2層構造物、一般的な免震構造、橋脚～免震～橋梁連成系、TMDを付加した構造物の振動比の範囲は、それぞれ  $\beta = -0.25 \sim 0.25$ ,  $-1.64 \sim -1.20$ ,  $1.60 \sim 1.70$ ,  $0 \sim 0.1$  であり、各図に点線の枠で示す。

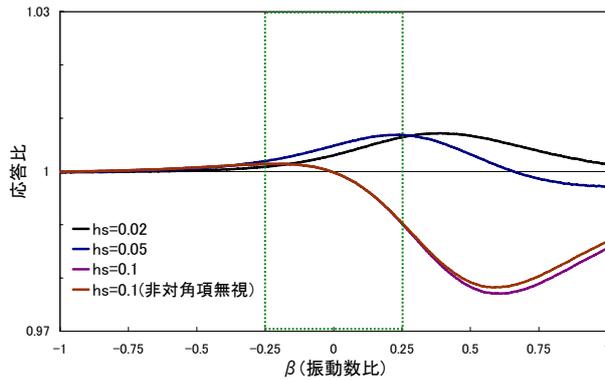


図2 2層建築物を想定した場合  
1層目応答比( $hp=0.1, \epsilon=0.5$ )

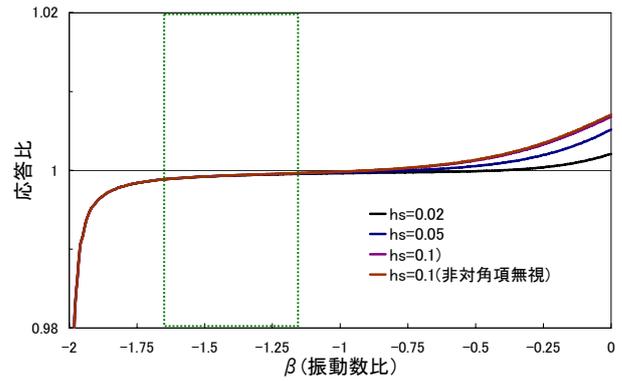


図3 免震構造を想定した場合  
1層目応答比( $hp=0.2, \epsilon=1$ )

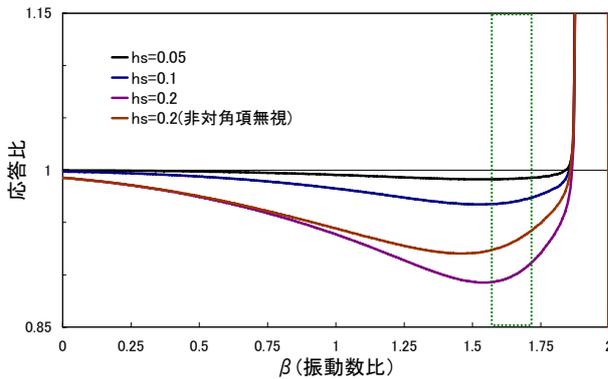


図4 橋脚～免震～橋梁連成系を想定した場合  
1層目応答比( $hp=0.02, \epsilon=5$ )

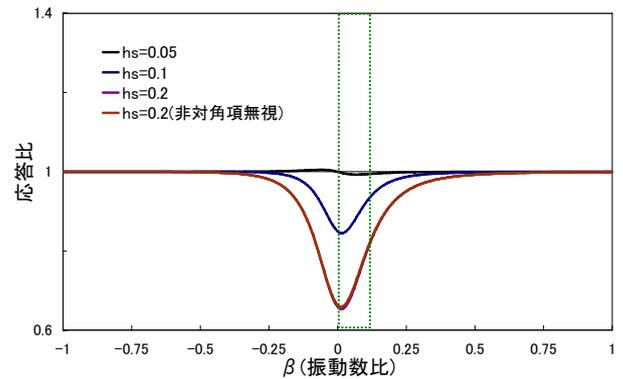


図5 TMDが付加した構造物を想定した場合  
1層目応答比( $hp=0.05, \epsilon=0.01$ )

2層構造物を想定した場合、第2層の減衰の大きさに関わらず近似式を用いることによる誤差は1%程度であり十分な解析精度を有していると考えられる。免震構造物を想定した場合は、同じく0.2%程度であり、申し分ない解析精度を有している。一方、橋脚～免震～橋梁連成系を想定した場合は、第2層の減衰の増加に比例して解析精度が低下してくることが分かるが、最大10%程度の過小評価になっている。また、TMDが付加した構造物を想定した場合にも、第2層の減衰の増加に比例して解析精度が低下しており最大30%程度の過小評価となる。そして、解析精度の比較のため(5)式で減衰の非対角項を無視した場合の例を各図に示す。解析精度の向上が認められた構造物があるものの、差程顕著ではないことが分かる。これは、(6)式で $\zeta_{12}, \zeta_{21}$ の値が微小であるとして無視した影響であり、行列式を求める際にそれらの項を無視することは減衰マトリクスの非対角項を無視するのと同程度の重みを有することを意味すると考える。

#### 4. 結論

今回提案した近似解では、2層構造物や免震構造物を想定した場合、第2層の減衰の大きさに関わらず応答変位の解析誤差は1%以下程度であり、申し分ない精度を有していると考えられる。一方、橋脚～免震～橋梁連成系を想定した場合は最大10%程度、TMDが付加した構造物を想定した場合は最大30%程度の過小評価となり、第2層の減衰の増加に比例して解析精度が低下することが分かった。これは、行列式を求める際に減衰定数の積の項を無視することが、減衰マトリクスの非対角項を無視することと同程度の重みを有することを意味すると考えられる。

#### 参考文献

- 1) 高岡宣善：工学のための応用不規則関数論，共立出版，pp. 94-112，1961.