

# モード解析法を用いた2自由度弾塑性系の時刻歴地震応答解析に関する研究

鳥取大学工学部 学生会員○山口将太  
鳥取大学工学部 正会員 谷口朋代

## 1.はじめに

モード解析法は、弾性時の構造物の応答を求める手法として様々な分野で使われている。しかし、モード解析法は非線形性を有する構造物の応答解析には、そのまま適用することができないことが知られている。そこで本研究は、モード解析法を用いて非線形応答を解析するために必要な基礎的知見を得ることを目的に行う。

## 2.部材の剛性に応じたモード特性値を用いた弾塑性応答解析

構造物の弾塑性応答の時刻歴のうち、部材が塑性状態にある部分に対してコッポリノ法<sup>1)</sup>を適用し、モード特性値を求めた。ここで、本研究が対象とするモード特性値は、 $\Omega_i$ :  $i$ 次の固有振動数、 $\phi_{2i}$ :  $i$ 次の2層のモードベクトル値、 $\zeta_i$ :  $i$ 次の減衰定数である。図-1は、解析に用いた2自由度系モデルであり、その諸元を表-1に示す。ただし、簡単のため、第1層のみバイリニア型の復元力特性(図-2参照)を有しており、第2層は弾性を保つものとする。尚、時刻歴応答はNewmarkの $\beta$ 法で解析した。コッポリノ法により得られた部材が塑性状態にある時のモード特性値を表-2aに示す。また、比較のため、部材が弾性を保つ時のモード特性値を表-2bに示す。

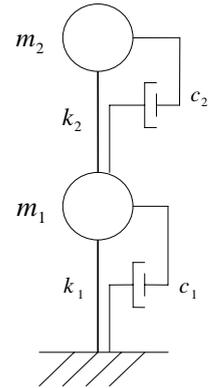


図-1 2自由度振動系モデル

表-1 2自由度系モデルの諸元

| モデル名   | $m_1$ (kg) | $m_2$ (kg) | $k_1$ (N/m) | $k_2$ (N/m) | $c_1$ (m/s/N) | $c_2$ (m/s/N) | $ep_1$ (m) | $\mu_1$ (%) |
|--------|------------|------------|-------------|-------------|---------------|---------------|------------|-------------|
| model1 | 1000       | 1000       | 30000       | 18000       | 0.0           | 0.0           | 3.0        | 20.0        |
| model2 |            |            |             |             | 200           | 50.0          |            |             |

表-2a コッポリノ法から得た塑性時のモード特性値

| モデル名   | $\Omega_1$ (rad/s) | $\Omega_2$ (rad/s) | $\phi_{21}$ | $\phi_{22}$ | $h_1$ (%) | $h_2$ (%) |
|--------|--------------------|--------------------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| model1 | 1.66               | 6.27               | 1.18        | 0.848       | 0.0400    | 0.0122    |
| model2 | 1.66               | 6.26               | 1.18        | 0.848       | 2.56      | 1.72      |

表-2b 弾性時のモード特性値

| モデル名   | $\Omega_1$ (rad/s) | $\Omega_2$ (rad/s) | $\phi_{21}$ | $\phi_{22}$ | $h_1$ (%) | $h_2$ (%) |
|--------|--------------------|--------------------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| model1 | 3.09               | 7.51               | 2.14        | -0.468      | 0.00      | 0.00      |

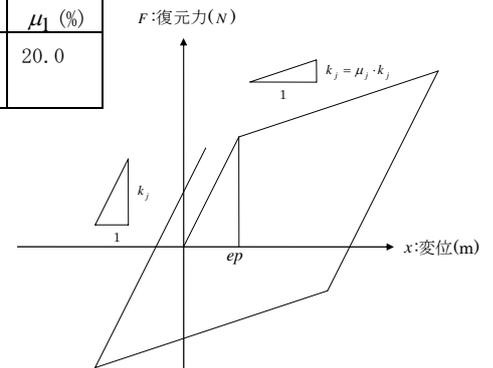


図-2 復元力特性の概略図

表-2aと後述する表-3bの結果から、第1層が塑性状態にある時のモード特性値は、減衰も含めて第1層の剛性に、塑性後のそれを用いて求めたモード特性値とほぼ一致することが分かる。またこの結果は、部材の剛性に応じたモード特性値を用いれば、弾塑性応答解析にモード解析法が適用できることを示唆している。

そこで、model1にホワイトノイズ状の地動加速度を作用させたときの時刻歴応答を、部材の剛性に応じたモード特性値を用いて解析を行うことを試みた。第1層、第2層の応答変位をそれぞれ図-3a、図-3bに示す。ここで、図中の凡例DISPはNewmarkの $\beta$ 法で解析した結果であり、これを目標値とする。また、FDISPは部材の剛性に応じたモード特性値を用いて解析した結果である。一方、linearは、弾性を保った場合の結果である。また、それぞれのグラフの下方にある黒い矢印は、塑性後のモード特性値を用いて解析を行った区間を示し、赤い矢印は目標とする解析が、塑性後の剛性を用いていた区間を示す。

図-3aより、目標とするmodel1の応答は、時刻0.08(s)から0.86(s)まで塑性状態にある。これに対して、部材剛性に応じたモード特性値を用いて解析した結果は、時刻0.09(s)から0.42(s)までが塑性状態であり、目標とする解析結果とは異なっている。更に、部材が塑性状態にある間の応答変位が目標値と比較して小さくなることが分かった。また、model1の第2層の応答変位は、第1層が弾性または塑性へ移行する時に、急変していることが分

かる。これは、モードマトリックス  $\Phi$  を、第 1 層の部材の剛性に応じて切り替えたために生じたと考えられる。これらのことにより、単に部材剛性に応じたモード特性値を用いるだけでは、構造物の弾塑性応答の時刻歴を正しく求めることが出来ないことが分かる。

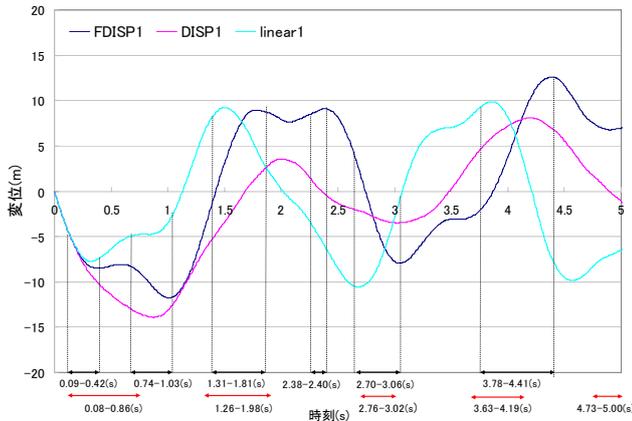


図-3a mode11 の第 1 層応答変位

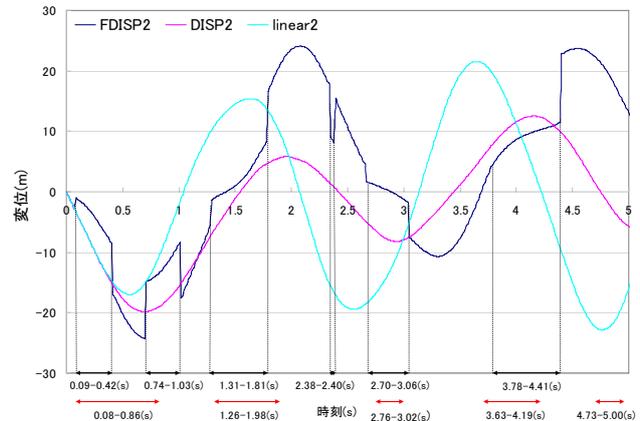


図-3b mode11 の第 2 層応答変位

### 3.モード間の連成を考慮した弾塑性応答解析

第 2 章の結果から、部材の剛性に応じたモード特性値を用いた応答解析では、目標値よりも小さな応答しか求められないことが分かった。そこで、部材塑性後もモード形状が不変である<sup>2)</sup>として解析することを試みた。式(1)は、第  $j$  層が塑性した場合の運動方程式である。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mu_j \mathbf{K}\mathbf{x} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{z} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ ：質量マトリックス， $\mathbf{C}$ ：減衰マトリックス， $\mu_j \mathbf{K}$ ：第  $j$  層が塑性したときの剛性マトリックス  
 $\mathbf{x}$ ：変位ベクトル， $\mathbf{1}$ ：単位ベクトル， $\ddot{z}$ ：地動加速度である。一方、2 自由度系モデルが弾性を保つときの固有振動数  $\Omega_{L1}$ ， $\Omega_{L2}$  から、モードマトリックス  $\Phi_L$  を決定する。また、式(2)は、基準座標  $\mathbf{q}$  と一般座標  $\mathbf{x}$  の線形変換を示す。尚、1 層目のモードベクトル値を 1 とする。

$$\mathbf{x} = \Phi_L \mathbf{q} \quad \because \Phi_L = [\{\phi_{L1}\} \quad \{\phi_{L2}\}], \quad \mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2\}^T \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、左側から  $\Phi_L^T$  を乗ずると、塑性時の基準座標上の運動方程式は、式(3a)のようになる。ここで、 $K_{N12} = K_{N21}$  であり、剛性マトリックスは対称行列である。

$$\begin{aligned} \Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_L \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_L^T \mathbf{C} \Phi_L \dot{\mathbf{q}} + \Phi_L^T \mu_j \mathbf{K} \Phi_L \mathbf{q} &= -\Phi_L^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{z} \\ \because \Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_L &= \begin{bmatrix} M_{N1} & 0 \\ 0 & M_{N2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_L^T \mathbf{C} \Phi_L = \begin{bmatrix} C_{N1} & 0 \\ 0 & C_{N2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_L^T \mu_j \mathbf{K} \Phi_L = \begin{bmatrix} K_{N11} & K_{N12} \\ K_{N21} & K_{N21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3a)$$

一方、部材が弾性を保つ場合の基準座標上の運動方程式は、よく知られた式(3b)のようになる。

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\zeta_L \Omega_L \dot{\mathbf{q}} + \Omega_L^2 \mathbf{q} = -\Gamma_L \ddot{z} \quad \because \Gamma_L = \frac{\Phi_L \mathbf{M} \mathbf{1}}{\Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_L}, \quad 2\zeta_L \Omega_L = \begin{bmatrix} 2\zeta_{L1} \Omega_{L1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_{L2} \Omega_{L2} \end{bmatrix}, \quad \Omega_L^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{L1}^2 & 0 \\ 0 & \Omega_{L2}^2 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

これらより、部材が塑性状態にあるときは剛性を介して連成状態にある式(3a)と、部材が弾性状態にあるときは非連成状態にある式(3b)を用いて、mode11 にホワイトノイズ状の地動加速度が作用したときの第 1 層と第 2 層の弾塑性応答の時刻歴を求めた結果を、それぞれ図-4a, 図-4b に示す。尚、図中の凡例 ER は各時刻の目標値に対する誤差(%)を示す。図-4a, 図-4b より、応答変位が 0.0(m)となる時刻で最大 1.5(%)程度の誤差が発生している以外は、目標値と提案する手法に基づく解析値は等しいことが分かる。これらのことより、部材塑性時には、剛性を介して連成している各モードの応答を用いれば、構造物の弾塑性応答の時刻歴を正しく求めることが出来ることが分かる。

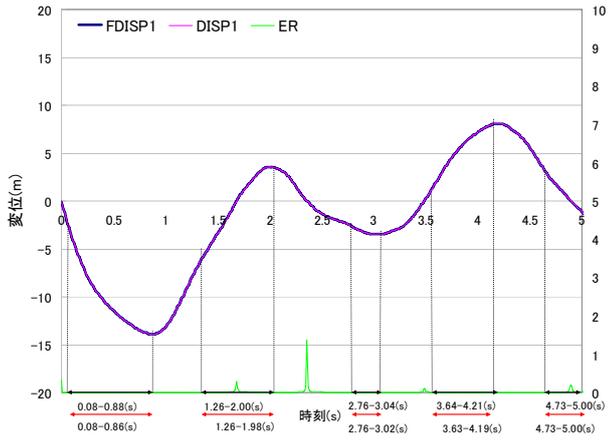


図-4a model1 の第1層応答変位

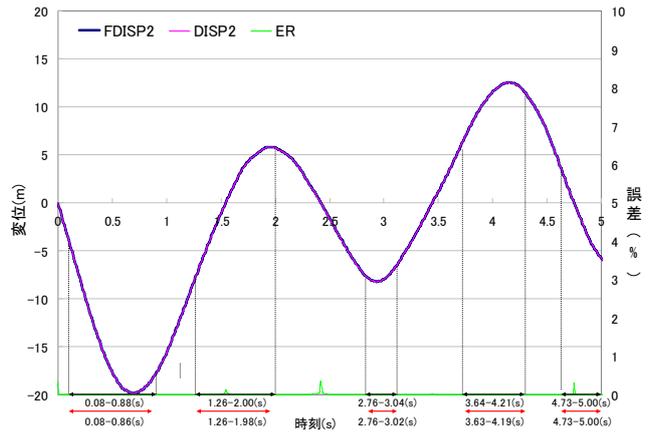


図-4b model1 の第2層応答変位

#### 4.剛性を介して連成している運動方程式の非連成化

前章に示した方法では、剛性マトリックス  $\Phi_L^T \mu_j K \Phi_L$  を介して1次および2次モードが連成状態にあるため、更なるモード分解の可能性を暗示している。そこで、更に  $s$  座標なる基準座標を仮定してモード分解を行い、弾塑性応答の時刻歴を求めることを試みる。式(3a)の固有値解析により、第  $j$  層が塑性状態にある固有振動数  ${}_j\Omega_{S1}$ ,  ${}_j\Omega_{S2}$  とモードマトリックス  ${}_j\Phi_N$  を求める。また、式(4)は、基準座標  $s$  と基準座標  $q$  の線形変換を示す。

$$q = {}_j\Phi_N s \quad \because \quad {}_j\Phi_N = \begin{bmatrix} \{\phi_{N1}\} \\ \{\phi_{N2}\} \end{bmatrix}, \quad s = \{s_1 \quad s_2\}^T \quad (4)$$

式(4)を式(3a)に代入し、左側から  ${}_j\Phi_N^T$  を乗ずると、 $s$  座標上で非連成化された第  $j$  層部材が塑性状態にある時の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T M \Phi_L) {}_j\Phi_N \} \ddot{s} + \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T C \Phi_L) {}_j\Phi_N \} \dot{s} + \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T \mu_j K \Phi_L) {}_j\Phi_N \} s = - \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T M \ddot{1}) \} \\ & \because \quad \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T M \Phi_L) {}_j\Phi_N \} = \begin{bmatrix} {}_jM_{S1} & 0 \\ 0 & {}_jM_{S2} \end{bmatrix}, \quad \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T C \Phi_L) {}_j\Phi_N \} \cong \begin{bmatrix} {}_jC_{S1} & 0 \\ 0 & {}_jC_{S2} \end{bmatrix}, \quad \{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T \mu_j K \Phi_L) {}_j\Phi_N \} = \begin{bmatrix} {}_jK_{S1} & 0 \\ 0 & {}_jK_{S2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

さらに、式(5)の左側から  $\{ {}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T M \Phi_L) {}_j\Phi_N \}^{-1}$  を乗じて式(6)を得る。

$$\ddot{s} + 2{}_j\zeta_{Sj} \Omega_{Sj} \dot{s} + {}_j\Omega_{Sj}^2 s = -{}_j\Gamma_{Sj} \ddot{z} \quad (6)$$

$$\because \quad {}_j\Omega_{Sj}^2 = \begin{bmatrix} {}_j\Omega_{S1}^2 & 0 \\ 0 & {}_j\Omega_{S2}^2 \end{bmatrix}, \quad 2{}_j\zeta_{Sj} \Omega_{Sj} = \begin{bmatrix} 2{}_j\zeta_{S1} \Omega_{S1} & 0 \\ 0 & 2{}_j\zeta_{S2} \Omega_{S2} \end{bmatrix}, \quad {}_j\Gamma_{Sj} = \frac{{}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T M \ddot{1})}{{}_j\Phi_N^T (\Phi_L^T M \Phi_L) {}_j\Phi_N}, \quad {}_j\Omega_{Sj} = \sqrt{\frac{{}_jK_{Sj}}{{}_jM_{Sj}}}, \quad {}_j\zeta_{Sj} = \frac{{}_jC_{Sj}}{2\sqrt{{}_jM_{Sj} {}_jK_{Sj}}}$$

一方、部材が弾性を保つ場合には、式(7)が基準座標  $s$  と基準座標  $q$  の線形変換を与える。

$$q = \Phi_1 s \quad \because \quad s = \{s_1 \quad s_2\}^T, \quad \Phi_1: \text{単位行列} \quad (7)$$

式(7)を式(3b)に代入し、左側から  $\Phi_1^T$  を乗ずると式(8)を得るが、物理的な意味は式(3b)と全く同じである。

$$\begin{aligned} & \ddot{s} + 2\zeta_s \Omega_s \dot{s} + \Omega_s^2 s = -\Gamma_s \ddot{z} \\ & \because \quad \Omega_s^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{S1}^2 & 0 \\ 0 & \Omega_{S2}^2 \end{bmatrix}, \quad 2\zeta_s \Omega_s = \begin{bmatrix} 2\zeta_{S1} \Omega_{S1} & 0 \\ 0 & 2\zeta_{S2} \Omega_{S2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{Sj} = \frac{\Phi_1^T (\Phi_L^T M \ddot{1})}{\Phi_1^T (\Phi_L^T M \Phi_L) \Phi_1}, \quad \Omega_{Sj} = \sqrt{\frac{K_{Sj}}{M_{Sj}}}, \quad \zeta_{Sj} = \frac{C_{Sj}}{2\sqrt{M_{Sj} K_{Sj}}} \end{aligned} \quad (8)$$

これらより、部材が塑性状態にあるときは式(6)と、部材が弾性状態にあるときは式(8)を用いて、model3 にホワイトノイズ状の地動加速度が作用したときの弾塑性応答の時刻歴を求めた。解析モデルの諸元を表-3a に示す。表-3b は、model3 に減衰を付与した model4 のモード特性値を示す。 $s$  座標上の応答を図-5 に、 $q$  座標上の応答を図-6 に、第1層、第2層の応答変位をそれぞれ図-7a、図-7b に示す。尚、下方の矢印の上にある数字は塑性状態にある層を示している。

表-3a 解析モデルの諸元

| モデル名   | $m_1$ (kg) | $m_2$ (kg) | $k_1$ (N/m) | $k_2$ (N/m) | $c_1$ (m/s/N) | $c_2$ (m/s/N) | $ep_1$ (m) | $ep_2$ (m) | $\mu_1$ (%) | $\mu_2$ (%) |
|--------|------------|------------|-------------|-------------|---------------|---------------|------------|------------|-------------|-------------|
| model3 | 1000       | 1000       | 30000       | 18000       | 0.00          | 0.00          | 3.00       | 2.00       | 20.0        | 30.0        |
| model4 |            |            |             |             | 200           | 50.0          | 3.00       | 2.00       | 20.0        | 30.0        |

表-3b model14 のモード特性値

| 塑性部材  | $i\Omega_{s1}$ (rad/s) | $i\Omega_{s2}$ (rad/s) | $\phi_{21}$ | $\phi_{22}$ | $i\zeta_{s1}$ (%) | $i\zeta_{s2}$ (%) | $j\Gamma_{s1}$ | $j\Gamma_{s2}$ |
|-------|------------------------|------------------------|-------------|-------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| なし    | 3.09                   | 7.51                   | 2.14        | -0.468      | 0.769             | 1.68              | 0.564          | 0.436          |
| 第1層   | 1.66                   | 6.26                   | 0.579       | -7.87       | 2.54              | 1.72              | 0.577          | -0.0129        |
| 第2層   | 2.11                   | 6.03                   | -0.580      | 7.86        | 0.923             | 2.16              | 0.474          | 0.0904         |
| 第1,2層 | 1.49                   | 3.82                   | 0.201       | -22.7       | 1.94              | 3.17              | 0.578          | -0.0141        |

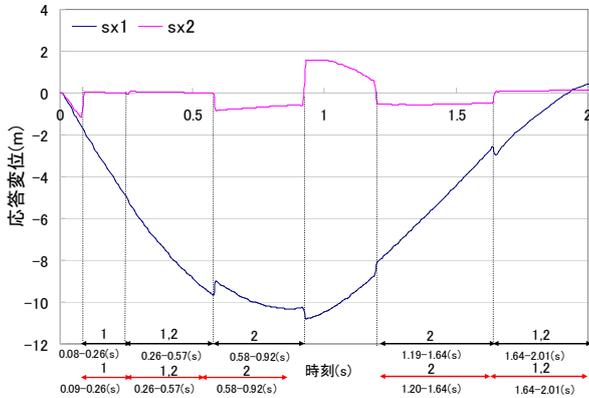


図-5 model14 の s モード座標上応答

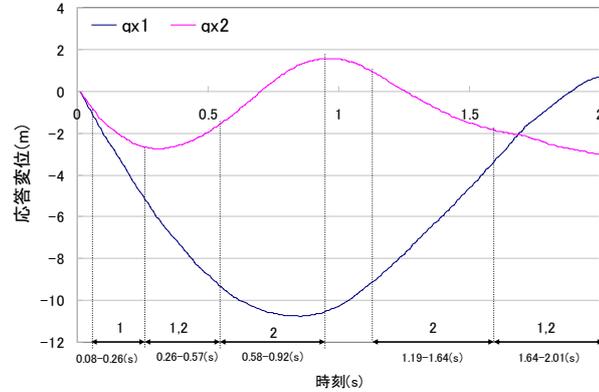


図-6 model14 の q モード座標上応答

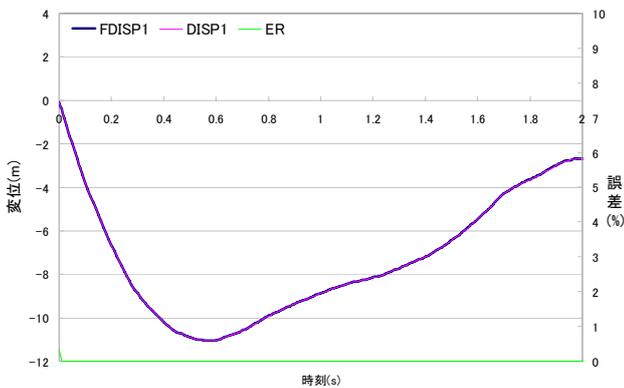


図-7a model14 の第1層時刻歴応答変位

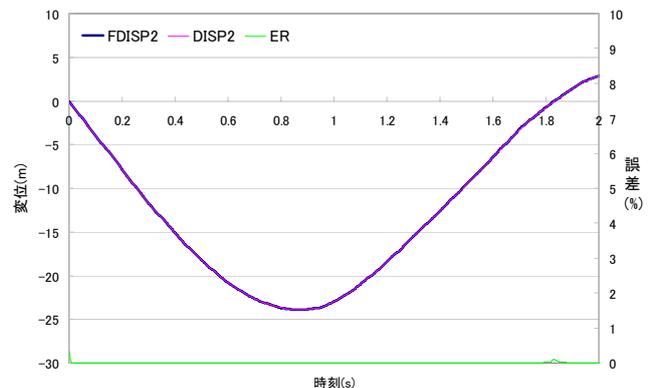


図-7b model14 の第2層時刻歴応答変位

前述のように、表-3b の第1層が塑性したときのモード特性値は、表-2a に示すコッポリノ法で求めたモード特性値と等しいことから、部材塑性後のモード特性値は、**q**座標上の連成効果を考慮した**s**座標上でのみ確認できることが分かる。また、図-5 より、第1層あるいは第2層のいずれかが、弾性または塑性に移行する時に、応答が不連続になっていることが分かる、これは、第1層、第2層が共に弾性状態にある時の刺激係数 $\Gamma_{si}$ が、第1層と第2層どちらか一方、あるいはその両方とも塑性している時の刺激係数 $j\Gamma_{si}$ と比較して極端に大きいことから生じたと考えられる。一方、図-6 より、**q**座標上の応答は、全く滑らかであることが分かる。また、図7-a,図7-b より、弾性応答の目標値に対する誤差(%)はほとんどなく、正しく解析できていることが分かる。

## 5 まとめ

本研究で得られた結果を以下に示す。

- ・部材塑性中にコッポリノ法を用いて観測したモード特性値は、**s**座標上のモード特性値に一致する。
- ・モード解析に基づいて構造物の弾塑性応答解析を求めるためには、部材塑性中に、剛性を介して連成するモード応答を考慮する必要がある。

## 参考文献

- 1) 長松昭男:モード解析,培風館 pp.99~101,pp.147~149,1985
- 2) Anil K.Chopra and Rakesh K.Goel:A modal analysis procedure for estimating seismic demands for buildings ,Earthquake Engineering Structural Dynamics. 31,pp.561~582,2002