「おりがみ」から理想的な構造物への創造

広島大学　正会員　　有尾 一郎

1.　はじめに

本研究話題は、弾性不安定 (座屈) の一般論を築かれた Giles との共同研究 “Twist buckling and the foldable cylinder : an exercise in origami”, Int. J. of Nonlinear Mechanics, 40(6), 833-843 (2005) の成果の一部からの抜粋である。

2 つの堅固な円筒を隙間をつくって一列に並べ、それにロール紙を巻き付け固定し、その両側でねじるとき，円筒周りにセン断が働き，**Fig.1** に示されるような捩れ座屈パターンが現れる[1]。このとき，その紙面内には曲げも含まれるが，微小なストレッチも働く張力場が形成される。しかし，ねじり作用下の円筒シェルの初期座屈問題 (**Fig.2**)[2] は等しい部分で曲げとストレッチのエネルギーが含まれる。終局的な座屈モードでは，三角形状からなる多面体構造が織り込まれ，1 次近似の後座屈を経たモード形の結果を得た。この多面体に変態した形態から主要なストレッチ抵抗部分となるトラス構造を構成し，軽量な展開構造物を創造したので，ここに報告する。

2.　全ポテンシャルと線形固有値解析

円筒の臨界座屈と 1 次近似の後座屈解析は以下の全ポテンシャル関数に基づく。

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathrm{b}} + \mathcal{V}_{\mathrm{m}} + \mathcal{V}_{\mathrm{T}} + \mathcal{V}_{\mathrm{c}} \tag{1}$$

ここに，それぞれの力学エネルギーは

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mathrm{b}} = \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^L\!\!\int_0^{2\pi R} \Big\{ \left(\nabla^2 w\right)^2 \\ +2(1-\nu)\left[(w_{xy})^2 - w_{xx}w_{yy}\right]\Big\}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{aligned}$$

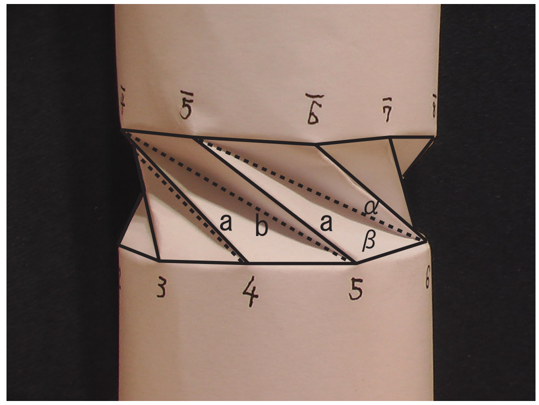


Fig. 1　円筒の捩れを伴うクレスリングパターン

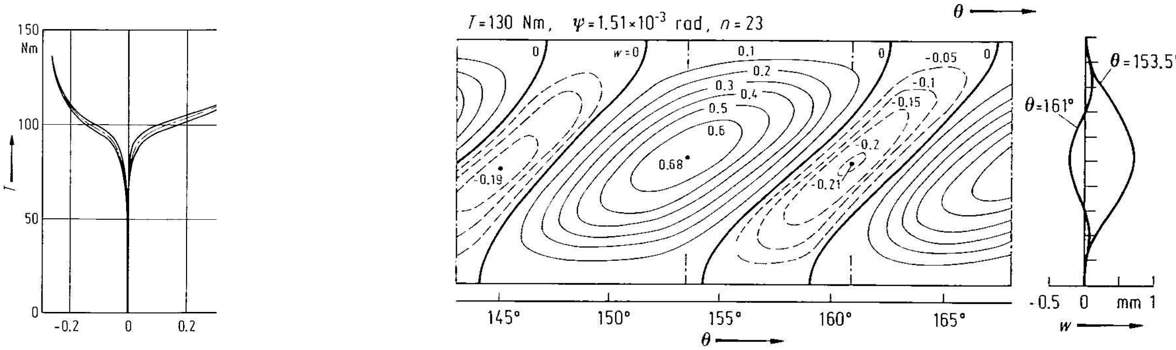
$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mathrm{m}} &= \frac{Et}{2}\int_0^L\!\!\int_0^{2\pi R} \Big\{ \left(\nabla^2\phi\right)^2 \\ &\quad +2(1+\nu)\left[(\phi_{xy})^2 - \phi_{xx}\phi_{yy}\right]\Big\}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ \mathcal{V}_{\mathrm{T}} &= -\tau t \int_0^L\!\!\int_0^{2\pi R} w_x w_y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ \mathcal{V}_{\mathrm{c}} &= -Et\int_0^L\!\!\int_0^{2\pi R} \phi\,\Big[\nabla^4\phi + \rho w_{xx} \\ &\quad -(w_{xy})^2 + w_{xx}w_{yy}\Big]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

から成り，ここに，$w(x,y)$ は半径方向のたわみを，$\phi(x,y)$ は応力関数である。$\mathcal{V}_{\mathrm{b}}$ は曲げエネルギーを，$\mathcal{V}_{\mathrm{m}}$ は膜エネルギーを，$\mathcal{V}_{\mathrm{T}}$ はトルクによる外力エネルギーを，$\mathcal{V}_{\mathrm{c}}$ は w 表面のガウス曲率に変換するための応力関数 ϕ がリンクする，von Kármán–Donnell 方程式からの制約条件から得られる組合せエネルギーである。Rayleigh-Ritz 法あるいは Galerkin 法では，モード形状は

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \sum_{i=1}^{2} A_i\, f_i(x,y), \\ \phi(x,y) &= \sum_{i=1}^{2} B_i\, f_i(x,y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

[1] 特に，この周期凹凸の斜めパターンをクレスリングパターンと呼ばれている。

[2] **Figs.1,2** の両者は回転対称・鏡映非対称型の座屈波形を示す。



(a) 変位 $w(L/2, y)$ とトルクの関係　　(b) 座屈波形の等高線図

Fig. 2 Yamaki の振り作用下の円筒シェル座屈 文献[1)]から引用. Length $L = 22.9$ mm, Radius $R = 100$ mm, thickness $t = 0.247$ mm, Young's modulus $E = 5.55$ GPa, Poisson's ratio $\nu = 0.3$.

と表し，ここに，

$$f_1(x, y) = \sin^m\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\lambda x}{L} - \frac{ny}{R}\right),$$
$$f_2(x, y) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

と仮定する。ここに，A_i, B_i は未知係数である。べき数 $m = 1, 2$ はツイスト長さの端部が単純支持と固定支持の 2 つの境界条件に対応する。最小値 $\min \mathcal{V}$ になるように，臨界トルク T^C に対応する A_1, B_1, n,λ を考慮し，線形固有値解析を行った上で A_2, B_2 をセットした。

3.　1 次オーダーの後座屈解析

式 (2) の完全な波形が採用されれば，**Figs.1,2** に見られるように，係数 A_1, B_1 は内側の変形が外側よりも大きい対称性破れ則の A_2, B_2 に影響する。当日は、典型的な紙供試体に対する後座屈解析を示す。エネルギー最小化は斜めの角度 γ に関するそれぞれの段階で実行される。後座屈の発展として紙面の峰と谷ライン間の γ の減少は，系がフォールディングに順応するように調整され，さらに斜めに変形するように示す。峰と谷ラインのこの同じ問題は Yamaki の結果と比較した。ここに，γ の実験値は，座屈の最初の段階における線形固有値問題の適用に対しして，それらよりも常時小さい値を示す。そのメカニズムを完全に適用するために，この適性は Rayleigh-Ritz 近似の制約を持って適用可能であるけれども，峰と谷ラインは異なった量によって回転しなければならないであろう。

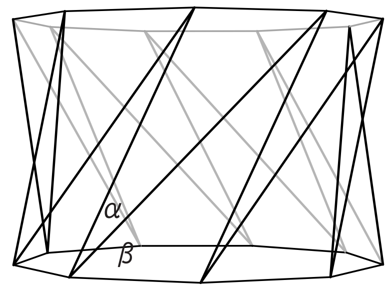


Fig. 3 新しく創生されたデザイン

4.　座屈からの新しい軽量構造の創造

円筒シェルの初期座屈と後座屈において，適当な斜めのパラメータ λ (γ) と波数 n の最小ポテンシャルエネルギーになるとき，それは必然的な結果となる。そこで、我々はその円筒シェルの捩れ座屈波形形成のメカニズムに基づく，新しい構造形態の創生法を考案した。例えば、ストレッチに抵抗する部位となる、峰と谷ラインを **Fig.3** に示すように取り出して，トラス構造の幾何学的に軽量で安定的な新しい構造物の創造を分析してきた。

参考文献

1) Yamaki, N. (1976) Experiments on the post-buckling behaviour of circular cylindrical shells under torsion. Applied Mathematics and Mechanics. Springer-Verlag.

謝辞

日本伝統文化と工学 (座屈) を結びつけた「おりがみ工学」の学術的なアイデア (研究の芽) として貴重な共同研究が行えた事に深く感謝する。