# 幾何学的非線形を考慮したはりのパラメトリック振動解析に関する考察

広島大学大学院　学生会員　○長瀬　竜一　広島大学大学院　フェロー会員　中村　秀治
広島大学大学院　学生会員　木下　一孝　大成建設（株）　正会員　藤本　慧

## １．目的

パラメトリック振動とは，Fig.1 に示すように復元力の係数が時間の周期関数となっている運動方程式で支配される振動のことである．これまで，パラメトリック振動の検討については実際に模型を作成し，実験的に行われてきた．しかし，大型の実験を行うことは経済的ではない．そこで，本研究では，幾何学的非線形を考慮した動的解析を行い，パラメトリック振動の特性を明らかにすること，そして数値解析的に検討可能か考察することを目的とする．

## ２．マシュー型方程式

パラメトリック振動を表現するマシュー型方程式を以下に示す．

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (a + 2q\cos\omega t)\,y = 0 \qquad (1)$$

ここで，y：面外方向変位，ω：変動軸力の角振動数

さらに変動軸力を

$$P(t) = P_0 + P_t\cos\omega t \qquad (2)$$

ここで，$P_0$：一定軸力，$P_t$：変動軸力の振幅

とすると，パラメータ $a, q$ は以下の式で表現される．

$$a = \frac{4\omega_n^2}{\omega^2},\; q = 2\frac{P_t}{P_{cr}^{(n)}}\frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{a}{2}\frac{P_t}{P_{cr}^{(n)}} \qquad (3)$$

ここで，$\omega_n$：n 次の固有角振動数，$P_{cr}^{(n)}$：n 次の座屈荷重

このパラメータ $a, q$ を用いて，マシュー型方程式の解の安定判別図を作ると Fig.1 のようになる．Fig.1 は安定・不安定領域に加え，座屈荷重との大小を考慮した図となっている．この安定判別図を用いて，数値解析結果と比較し検討を行う．

## ３．解析モデル

本解析では，マシュー型方程式を数値解析的に解くことを考え，Fig.2 に示すような単純ばりのモデルで検討を行った．Table１に物性値，Table2，Table３に座屈荷重と固有角振動数を示す．

## ４．解析方法

数値解析を行うにあたり，汎用コード ABAQUS を利用し，解析モデルの幾何学的非線形性を含む動的解析を行った．また，この解析において，荷重の周期を変えてパラメータ $a, q$ を定め，安定判別図上の検討対象とする点で実行している．この $a, q$ は，安定領域，不安定領域，座屈荷重よりも大きいか，小さいか，座屈荷重であるかにより決定している．

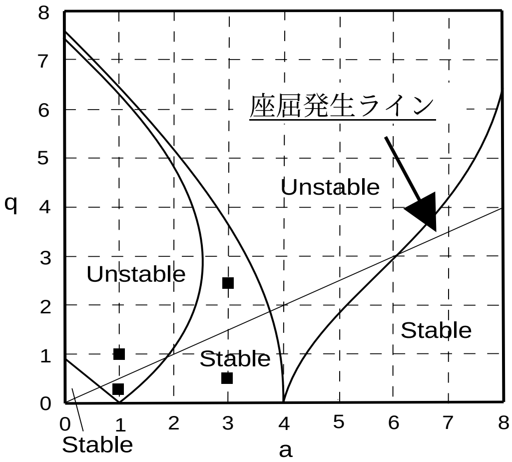


Fig.1 安定判別図

Table１　物性値

| 物性 | 単位 | 値 |
|---|---|---|
| スパン：L | mm | 1000 |
| 密度：ρ | kg/mm^3 | 0.01 |
| ヤング率：E | N/mm^2 | 21000 |
| ポアソン比 | | 0.03 |
| 断面積 | mm^2 | 7.07 |
| 断面2次モーメント | mm^4 | 580 |

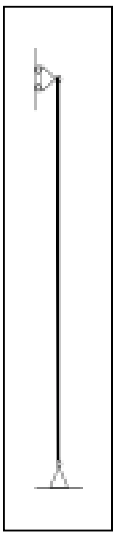

Table2 座屈荷重

| 次数 | 座屈荷重 |
|---|---|
| 1 | 703.17 |
| 2 | 2812 |
| 3 | 6324.4 |

単位：kN

Table3 固有角振動数

| 次数 | 角振動数 |
|---|---|
| 1 | 0.0959 |
| 2 | 0.383 |
| 3 | 0.867 |

単位：rad/s

Fig.2 解析モデル

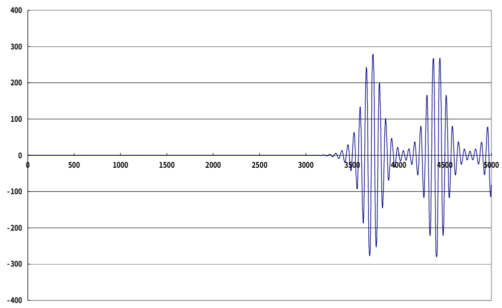

Fig.3-1　*a*=1,*q*=0.25 の場合

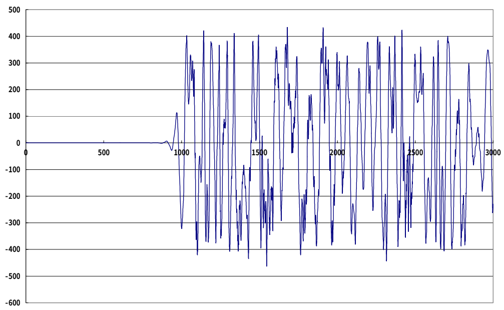

Fig.3-2　*a*=1,*q*=１の場合

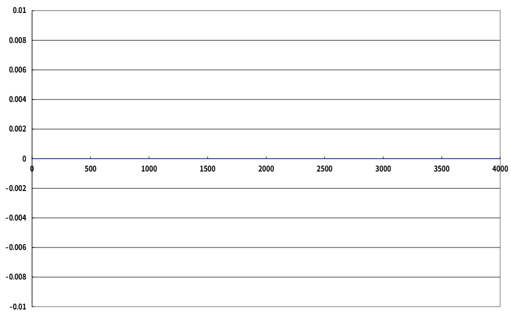

Fig.3-3　*a*=3,*q*=0.5 の場合

Fig.3-4　*a*=3,*q*=2.5 の場合

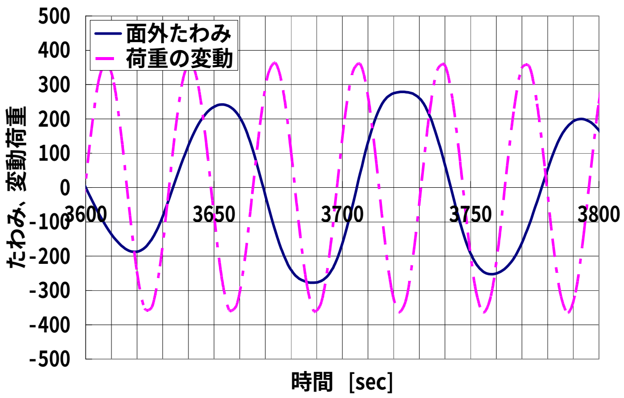


Fig.4　はりの面外変形と荷重の周期

## ５．解析結果と考察

本解析の結果として，変動軸力を加えた時のはり中央の面外方向変位の一例を示す．

Fig3-1 から Fig.3-4 の結果より，安定領域においては，はりの面外振動は見られなかった．一方，不安定領域においては，面外振動が見られた．さらに不安定領域における挙動は座屈荷重に対する大小で挙動が異なっている．座屈荷重以上の場合，Fig3-2 に示すような，不規則振動を行う．これに対して，座屈荷重よりも小さい場合は，Fig3-１に示すような周期的な挙動を示すことが本解析でわかった．*a*=1,*q*=0.25 の時の，変動荷重とはりの面外振動の周期を Fig.4 に示す．この図より，面外振動の周期が，荷重の周期の 2 倍になっていることがわかる．これより，パラメトリック振動は不安定領域のしかも座屈荷重よりも小さい領域のみ生じると考えられる．

この結果から，はりの圧縮に対するパラメトリック振動には座屈の概念を取り入れることにより数値解析的検討が可能となることを示している．本来，式(1)に示すマシュー型方程式は線形領域の式であり，しかも安定判別図においては運動方程式における固有値から解の収束・発散を決定しているため，構造物の固有振動数のみによって安定判別図は作られていることがわかる．

本研究における手法は，幾何学的非線形を考慮しており，大変形まで表現可能となっているため，これまで用いられてきた固有振動数をベースとした安定判別図に座屈の発生を取り入れることが可能となった．これにより，固有振動数と変動荷重の振動数との関係から安定判別図を Fig.1 のように座屈の発生を加えることで，よりパラメトリック振動の特性を捉えることが可能となったと言える．

以上のことから，幾何学的非線形を考慮することによりはりのパラメトリック振動を数値解析的に検討することが可能であると考える．

## 参考文献

1) Boltin,V.V.，弾性系の動的安定，コロナ社，　pp7-pp25
2) 岡本舜三，建設技術者のための振動学，オーム者，pp39-pp47
3) 土木学会編，鋼構造シリーズ 11 ケーブル・スペース構造の基礎と応用，丸善，pp57-pp89
4) 藤野陽三他，ケーブル・はりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析, 土木学会論文集, No432/I-16
5) 岡内功他, 大振幅加振による長大斜張橋の実橋振動実験, 土木学会論文集，No455/I-21
6) 高橋和雄，変動軸力を受けるケーブルの動的安定性，構造工学論文集，Vol.37A，土木学会，pp921-928