

応力-ひずみ関係を近似式で与えた耐荷力解析法の検討

広島大学大学院 学生会員 ○宮田 和実

広島大学大学院 フェロー会員 中村 秀治

広島大学大学院 正会員 藤井 堅

1. はじめに

限界状態解析において非線形領域を簡易に安定して計算できるような解析手法の必要性は高いと思われる。本研究では材料的非線形性を簡易な応力-ひずみ関係の近似式で与え、関係式の計算に数式処理システムを用いることによって精度の良い近似解を安定して求めることを図る。また汎用構造解析プログラムによる解析結果との比較を行い、本解析手法の妥当性を明らかにする。

2. 平面3角形要素における耐荷力解析法

基本となる考え方は、周知の有限要素法と同様である。ここでは平面要素を用いた有限要素解析の手順に則して考えていく。本解析手法では、応力-ひずみ関係を簡易な近似式で置くこと、数式処理による荷重-変位関係の偏微分を用いることが特徴である。

2.1 応力-ひずみ関係の仮定

本解析法では応力-ひずみ関係を材料的、幾何学的非線形性を考慮した近似関数で与える。近似関数には種々形状が考えられる。近似関数の例をFig.1に挙げる。曲線形状より、降伏後の非線形領域も表現できていることが見て取れる。一つの簡易な式で弾性領域から塑性領域、破断に至るまでの応力-ひずみ関係を表現してしまうことが、本解析手法の特徴の一つである。

ここで、解析で考慮する3角形要素において、応力-ひずみ関係の形を次の近似式で仮定する。

$$\sigma = \sigma_u \frac{k\varepsilon}{\sqrt{(k\varepsilon)^2 + C}} \quad (1)$$

式(1)は、Fig.1の(a)のようなグラフの形状をとる。平面要素を考える上で、応力とひずみの値はx方向、y方向で相互に作用し合うということを念頭に置けば、応力-ひずみ関係式は、

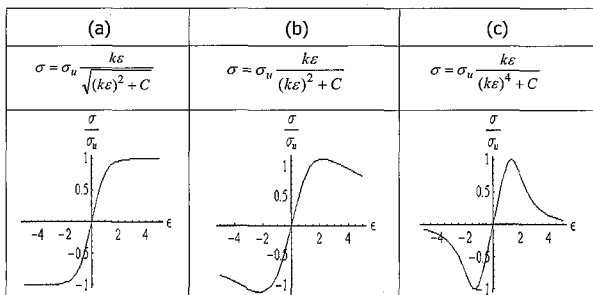


Fig.1 近似関数の例

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_u \frac{k(\varepsilon_x + v\varepsilon_y)}{\sqrt{\{k(\varepsilon_x + v\varepsilon_y)\}^2 + C}} \\ \sigma_y &= \sigma_u \frac{k(\varepsilon_y + v\varepsilon_x)}{\sqrt{\{k(\varepsilon_y + v\varepsilon_x)\}^2 + C}} \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_u}{\sqrt{3}} \frac{k\gamma_{xy}}{\sqrt{(k\gamma_{xy})^2 + C}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_u \left\{ \frac{k\varepsilon_x}{\sqrt{(k\varepsilon_x)^2 + C}} + v \frac{k\varepsilon_y}{\sqrt{(k\varepsilon_y)^2 + C}} \right\} \\ \sigma_y &= \sigma_u \left\{ \frac{k\varepsilon_y}{\sqrt{(k\varepsilon_y)^2 + C}} + v \frac{k\varepsilon_x}{\sqrt{(k\varepsilon_x)^2 + C}} \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_u}{\sqrt{3}} \frac{k\gamma_{xy}}{\sqrt{(k\gamma_{xy})^2 + C}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。ここで、 v はポアソン比である。

2.2 増分計算

仮想仕事の原理は次式の通りである。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_S T_i \delta u_i dS = 0 \quad (4)$$

n ステップまで、応力、ひずみ、変位はすべて正しい値が得られていると仮定して、 $n+1$ ステップで微小な増分を考えると、仮想仕事の原理は、

$$\int_V \left({}^n\sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta \sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} \right) dV - \int_S \left({}^nT_i \delta \Delta u_i + \Delta T_i \delta \Delta u_i \right) dS = 0 \quad (5)$$

となり、これを整理して一般形として表現すると

$$[K(u)] \{\Delta U\} = \{\Delta F\} + \{{}^nF\} - \{{}^nR\} \quad (6)$$

ここで、

$[K(u)]$: 数式処理で得られる変位 $\{^nU\}$ における剛

性マトリックス

$\{\Delta U\}$: 変位増分ベクトル

$\{\Delta F\}$: 荷重増分ベクトル

$\{{}^nF\}$: 第 n ステップまでの荷重の総和

$\{{}^nR\}$: 第 n ステップでの等価節点力(内力)

と表される。

2.3 数式処理により多変数関数の逆関数を求める方法

非線形解析は、一般的に区分的線形解析で行われているが、本解析法では崩壊等の非線形荷重－変位特性を表す多変数関数について、近似的に逆関数を求めることで非線形解を得る。平面 3 角形要素の荷重－変位関係式を各々変位で偏微分した後、数値的の逆マトリックス計算を行って逆関数を求める。

微分計算には数式処理プログラム REDUCE を用いた。REDUCE は複雑な代数計算をコンピュータ上で実行するシステムである。各関数形状について数式処理を実行したが、いずれの場合も数秒で終了し、Fortran 形式で結果ファイルの出力ができた。

4. 解析例と汎用構造解析プログラムとの比較

本解析で用いた 2 種類のモデルを Fig.2 に示す。

以下に解析の結果を示す。紙面の関係上、ここでは、ノッチモデルの結果の一部を示す。比較対象解析の汎用構造解析プログラムには ABAQUS を用いた。

応力－ひずみ関係仮定式(2)、(3)の定数に以下の値を代入し、解析に使用した。

$$\left. \begin{aligned} k &= 1750.0 \\ k' &= 1166.0 \\ C &= 3.0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

仮定式(2)、(3)を適用し、本解析手法と ABAQUS の解析で得られた荷重－変位関係を Fig.3 に示す。仮定式(2)を適用した解析結果と、ABAQUS の解析結果は非常に良好な一致を示す。仮定式(3)と ABAQUS との間では、弾性域付近では非常に良好な一致が見られるが、降伏は ABAQUS では緩やかであるのに対し、仮定式(2)は急激に起こっている。

Fig.4 に作用荷重 $P=6.3\text{kN}$ のときの主応力分布図を示す。左から仮定式(2)、仮定式(3)、ABAQUS となっている。モデル下端部の最小断面部分では、切欠き端部からの応力集中の発生が見て取れる。

5. 結論

- 1) 部材レベルでの材料非線形の応力－ひずみ関係式はすでに多数検討されており、実際に単純な有理式でも崩壊まで含めた部材の挙動特性をあらわすことが出来る。
- 2) 一般的に多変数関数の逆関数を解析的に求めることは困難であるが、多変数関数の微分が解析的に求められるならば、逆関数を数値的に得ることが出来る。
- 3) 逆関数計算において、偏微分の 1 次の項までの近似を増分解析に適用しても、比較的高精度の近似解が得られる。
- 4) 切欠きやノッチを有する平板に本解析手法を適用し、汎用構造解析プログラムの解析結果と比較した場合、非常に良く一致することが確認された。

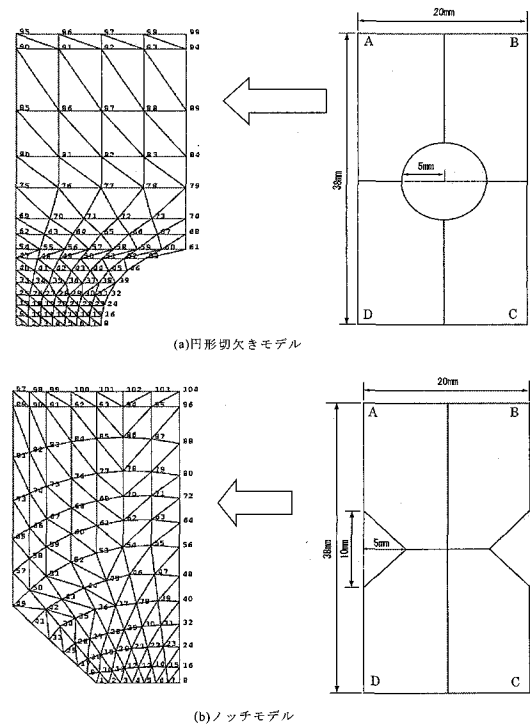


Fig.2 解析対象モデルとメッシュ切り

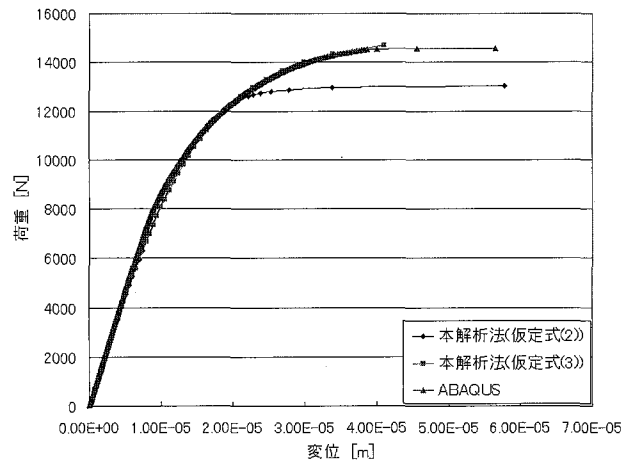


Fig.3 近似式を適用した時のモデル荷重－変位関係

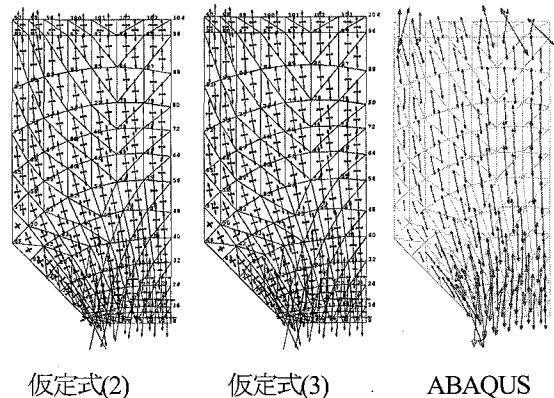


Fig.4 $P=6.3\text{kN}$ 時の応力分布

参考文献

- 1) 中村秀治：数式処理による高階微分を用いた限界状態解析法の提案，土木学会論文集，No.477/I-25，pp.53～62，1993.10