二次元浅水流の保存型CIP解法

広島大学大学院　　正会員　○内田龍彦，河原能久

1. 序論

計算機能力の向上に伴い，現在までに様々な高度な数値流体解析法が提案されており，このうちのひとつであるCIP法[1)]は近年目覚しい発展を遂げ，局所的な流れにおいては気相，液相，固相の同時解法等が可能となりつつある．水工学の分野では，河川流や氾濫流解析などのように多くは広範囲の場の流れが対象となるため，一次元，二次元解析の重要性は高い．しかし，CIP法の浅水流方程式への応用は限られている[例えば2)]．これは，提案された当初のCIP法では①質量保存性が保障されないこと，②二次元解析では実用的な陽解法が多く提案されているが，これまでのCIP法は基本的に圧力項が陰的に解かれていること，が主な原因と考えられる．そこで，本研究ではこれらの課題を改善する二次元浅水流の保存型CIP陽解法を提案し，ダムブレーク問題に適用し，検証する．

2. 二次元浅水流の保存型CIP陽解法

本解析で用いる基礎方程式は，デカルト座標系でも任意の境界形状に適用できるように，有限体積領域とその面における内の流体占有率を考慮した二次元浅水流方程式である[2),3)]．本解析法では，オリジナルのCIP法で課題であった保存性が保障されないことを解決するために，近年提案された保存保障型のCIP-CSL2法[4)]を用いた有限体積浅水流解法を提案する．この方法では，ある方向の有限体積内の保存量の分布は，挟まれる辺の値と有限体積内の平均値を満たすように決定される[4)]．本解析法における物理量の評価点を**図-1**に示す．本解析法では，解の保存性だけでなく，格子の交点の値(**点値**，小文字の変数)，x,y 方向の格子一辺にわたる平均値(**線平均値**，添え字 x もしくは y の大文字の変数)，格子内にわたる平均値(**面平均値**，添え字 xy の大文字の変数)を同時に解くことによって，有限体積領域とその面における流体占有率を，連続式，運動方程式の中で直接考慮できる利点がある[2),3)]．さらに，これらを用いれば，有限体積内の抵抗体の形もある程度表現可能となる．ここで，h:水深，u_i:i 方向流速であり，p,A_i, V は点，i 方向断面，計算格子の流体占有率(空隙率)である．なお，有限体積内の分布を考慮せずに，一定値とおけば従来のUpwind解法[5)]となる．

解析方法を示す．従来のCIP法と同様に，運動方程式の移流項とその他の項は分離して解かれ，運動方程式では u_i を，連続式では h を計算する[2),3)]．ただし，連続式を用いて移流項の式変形は行わず，発散型のままで解く保存型解法[3)]を適用している．次に，更新された流速を用いて連続式を計算し，連続式の計算により得られる水深を用いて圧力項を計算する．この考え方は，二次元浅水流の陽解法[5)]としてよく用いられているものと同様の方法である．この計算法をダムブレーク問題に適用すると，仮に圧力を陰的に解いても，正の段波上流端でアンダーシュート，先端でオーバーシュートが生じる[3)]．これを解決するために以下のように水深(水位)の計算法を改良する．**図-2**に示すように，水位の点(線平均)値は挟まれる線(面)平均値の間に強制的に収まるように修正する．また，水深の内挿関数による解の振動を抑えるために，連続式の計算においては有理関数を用いたRCIP法[4)]を適用する．ここで，前者は運動方程式の移流項の計算の際の連続式の計算後にも用いられるが，後者は連続式の計算にのみ用いられる．**図-3**に本解析法のフローを示す．なお，フローに示すように最小水深 h_{min} 以下であれば流速 u_i は強制的にゼロが与えられる．また，本論文においては，水平，底面せん断力項は取り扱っていないため，フローから省略している．

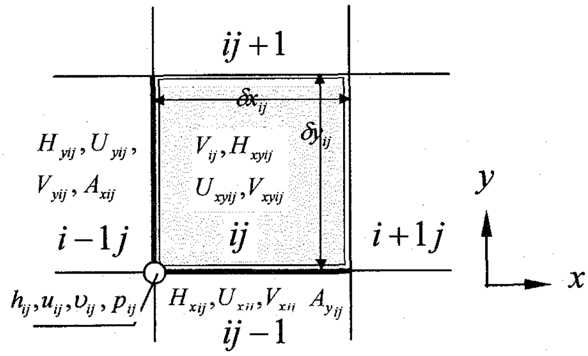


図-1 本解析における主要な変数の配置

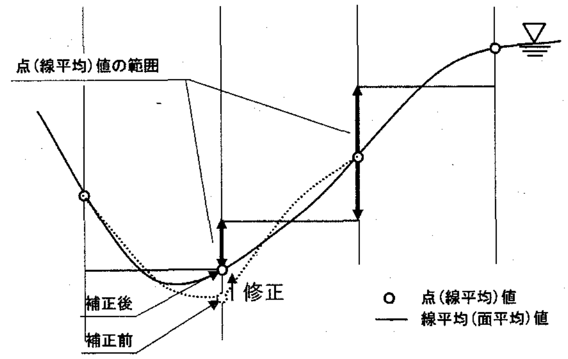
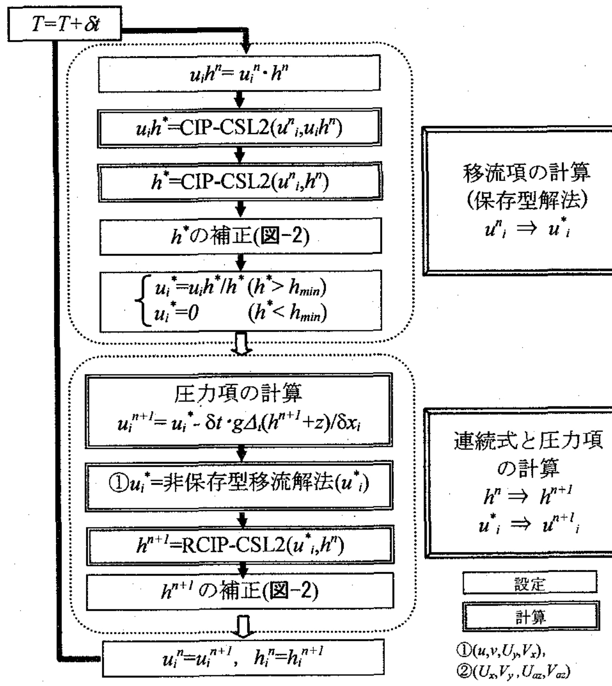


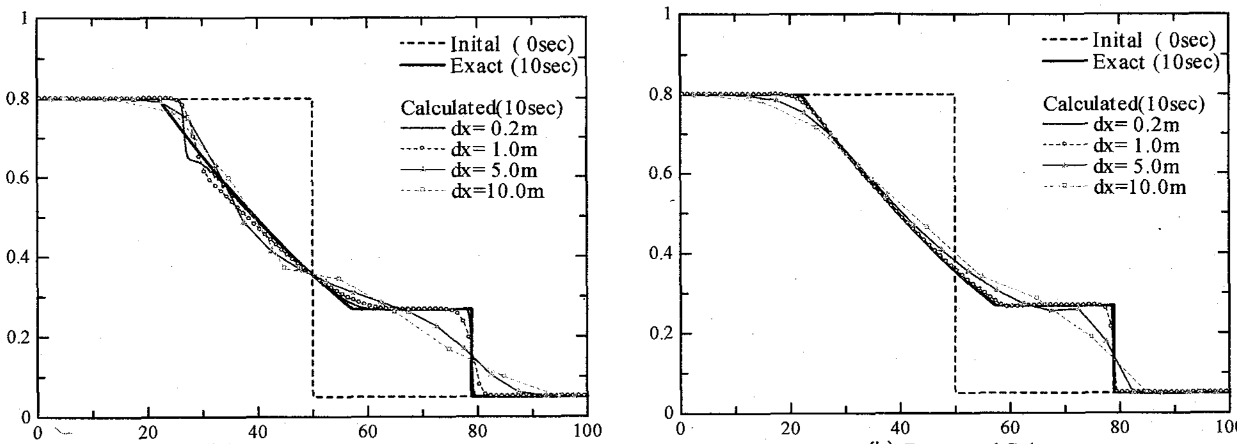
図-2 水位の点(線平均)値の制御方法



図－3 二次元浅水流の保存型CIP陽解法のフロー

3. 解析結果の検証

図-4 は計算格子の解像度を変化させた場合の一次元ダムブレ



(a) Upwind Scheme (b) Presented Scheme

図-4 計算格子の解像度による一次元ダムブレーク問題の計算結果の比較

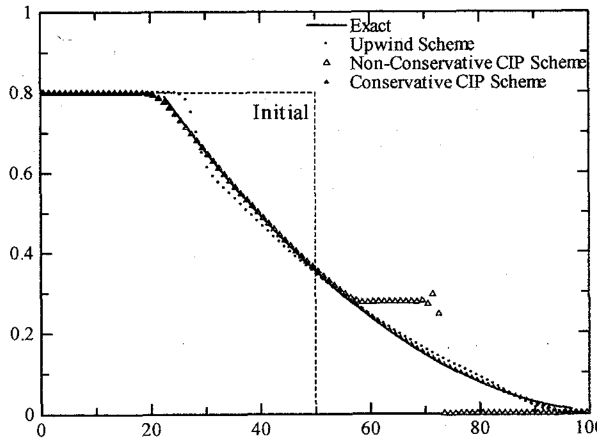


図-5 保存型スキームと非保存型スキームの計算結果の比較

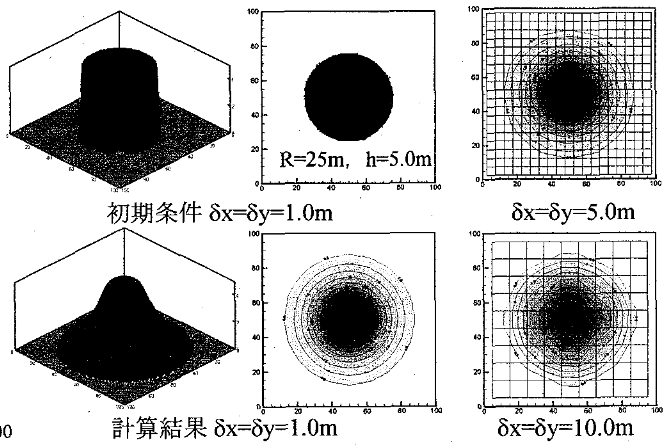


図-6 円水柱崩壊計算結果(計算結果は 2 秒後)

ーク問題の比較である．負の段波の到達点においては，Upwind 解法は圧力勾配を中央差分で計算する場合，理論値と異なる不自然な解となる [5]が，本解析法では理論値とほぼ一致している．また，段波の計算では生成項の影響が強く Upwind 解法でも不連続な段波先端を捉えることが出来る [5]ものの，Upwind 解法では段波先端部を表現するためにおよそ 7 点の格子点数が必要である．これに対し，本解析法では必要最小限の点数と言える 2 点で表現している．このため，計算格子点数が少なくなると Upwind 解法では正の段波を表現できなくなり，段波先端位置が前進するが，本解析法では不必要に計算結果が拡散することなく，少ない格子点数でも理論値の平均値を良く表しており，段波先端位置は変化しない．また計算格子を小さくすると，計算結果は理論値に近づき，dx=0.2m においては図のスケールでは理論値と計算値の違いはほとんど確認できない．**図-5** は，ドライベット状態におけるダムブレーク問題に対して，Upwind 解法，非保存型 CIP 解法 [3]と保存型解法である本解析法との比較である($h_{min}=10^{-8}$m)．非保存型 CIP 解法ではドライベットであっても段波先端部で高い波高が形成される．これは，水工学の分野でこれまで行われてきた CIP 法を用いた計算結果と同様であり，これを防ぐ一般的な方法は現在までに提案されていない．保存解法である Upwind Scheme は，フロント先端が滑らかに計算されているが，先端速度が遅く先端部付近の水深が理論値よりも高い．一方，本解析法では，特別な処理を用いずに段波先端部の滑らかな波形を表現できており，先端部近傍まで理論値と良好な一致を示している．**図-6** は，円形の水柱崩壊計算結果である($h_{min}=10^{-4}$m)．一般に，数値解析法の多くは軸方向に対してそれ以外の方向の計算精度は低下する．しかし本解析モデルの計算結果では同心円の計算結果が得られており，計算精度の方向依存性が少ないことが確認できる．さらに粗い計算格子の計算結果においても良好な結果が得られている．

4. 結論

本研究では二次元浅水流の保存型 CIP 陽解法を提案し，従来の CIP 解法で課題であった段波先端部で波高が高くなる問題を解決した．さらに，従来の解法に比べ少ない格子点数で段波を表現することが出来，かつ陽解法でありながら安定に計算可能であることを示した．また，本解析法を円形の水柱破壊問題に適用し，方向依存性がほとんど見られず，すべての方向に高精度な解法であることを示した．

参考文献

1) T. Yabe et al.: A universal solver for hyperbolic-equations by cubic-polynomial interpolation. 1. One-dimensional solver, *Jour. Comput. Phys. Commun.* 66, p.219, 1991. 2) 内田龍彦，河原能久：任意の境界形状を有する二次元浅水流の高精度解析手法の開発，水工学論文集，第 50 巻，p.799，2006. 3) 内田龍彦，河原能久：様々な境界条件を有する二次元浅水流の CIP 解法，第 19 回数値流体力学シンポジウム講演論文集，A2-1，2005. 4) T. Nakamura et al.: Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme for Multi-dimensional Hyperbolic Equations with Directional Splitting Technique, *Jour. Comput. Phys.* 174, 171-207, 2001. 5) X. Ying et al.: Upwind Conservative Scheme for the Saint Venant Equations, *Jour. Hydraul. Eng.*, *ASCE*, p.977, 2004.