

高粘性減衰系のガスト応答解析について

(株)荒谷建設コンサルタント 正会員 吉田隆千代

1. はじめに

長大橋や高層建築物では自然風の乱れによる振動を抑制する目的で、オイルダンパーなどの制振装置を設置するケースが増えている。構造物に大きな粘性減衰が付加されると固有振動性状は非減衰系のそれとは大きく異なるものとなる。そのため、ガスト応答解析を行う際には、非減衰系の固有振動特性に基づく通常のスペクトル法¹⁾は適用できない。

高粘性減衰系のガスト応答解析は二通りの方法に大別される。一つは複素固有値解析結果を用いるスペクトル法、二つ目は直接積分時刻歴法(以下、時刻歴法)である。後者は、事前に荷重点間の風力のクロススペクトルから荷重点ごとの時系列波形を作成する必要がある。手間がかかる上に膨大なデータの処理を必要とすることから、大規模自由度の解析には不向きである。

そこで本報では、より実用的と考えられる前者に着目し、まず解析方法について考察を加えた。ついで、数値計算を行い解析方法の妥当性を検証した。

2. 解析方法

2.1 運動方程式

自然風の乱れによる不規則外力を受ける構造物の運動方程式は次のようになる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C_s + C_a]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{p\} \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

ここに、 $[M]$ 、 $[C_s]$ 、 $[C_a]$ 、 $[K]$ 、 $\{x\}$ 、 $\{p\}$ ；質量行列、構造減衰行列、空力減衰行列、剛性行列、構造物の変位ベクトル、変動風力ベクトル

高粘性減衰系では、非減衰系の固有モードを用いて運動方程式を非連成化することができない。そこで、ここでは運動方程式①を③式に変換する²⁾。このようにすれば非連成化が可能になる。③は自明の式②と①を連立させることによって与えられる。

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad \cdots \cdots \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} C_s + C_a & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \quad (3)$$

ここで、次の定義を行い③を④のように表記する。

$$[D] = \begin{bmatrix} C_s + C_a & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, [E] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \{y\} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \{f\} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[D]\{\dot{y}\} + [E]\{y\} = \{f\} \quad \cdots \cdots \quad (4)$$

④において $\{f\} = \{0\}$ として、 $\{y\} = \{\phi\}e^{i\omega t}$ を④に代入すると、 $2n$ 自由度の固有振動方程式が得られる。ここに、 n は運動方程式①の自由度である。

$$(\lambda[D] + [E])\{\phi\} = \{0\} \quad \cdots \cdots \quad (5)$$

⑤の固有値と対応する固有ベクトルを

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \cdots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n \quad \cdots \cdots \quad (6)$$

$$\{\phi_1\}, \{\bar{\phi}_1\}, \{\phi_2\}, \{\bar{\phi}_2\}, \cdots, \{\phi_n\}, \{\bar{\phi}_n\} \quad \cdots \cdots \quad (7)$$

として、 λ を対角上に並べた固有値行列 $[\Lambda]$ と、固有ベクトル $\{\phi_i\}$ を列方向に並べた行列を $[\Phi]$ を作成する。

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, [\Phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n] \quad \cdots \cdots \quad (8)$$

$$\text{次に、} \{y\} = [\Psi] \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix}, [\Psi] = \begin{bmatrix} \Phi & \bar{\Phi} \\ \Phi\Lambda & \bar{\Phi}\Lambda \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \quad (9)$$

と置き④に代入して固有ベクトルの直交性を利用すれば、非連成化された次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \bar{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & \bar{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T p \\ \bar{\Phi}^T p \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \quad (10)$$

$$\text{ここに、} [D_1] = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}, [D_2] = \begin{bmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_i &= 2\lambda_i \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} + \{\phi_i\}^T [C] \{\phi_i\} \\ \delta_i &= -\lambda_i^2 \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} + \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} \\ \lambda_i &= \delta_i / d_i = \sigma_i + j\omega_{di}, \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \quad (11)$$

$$\sigma_i = -h_i \omega_{oi}, \quad \omega_{di} = \sqrt{1 - h_i^2} \omega_{oi}$$

h_i , ω_{oi} ; i 次モードの減衰定数, i 次モードの非減衰固有円振動数

⑩式を i 次モードについて表すと次のようになる。

$$\dot{q}_i + \lambda_i q_i = \{\phi_i\}^T \{p\} / d_i \quad \cdots \cdots \quad (12)$$

任意の変位ベクトル $\{x\}$ はモードの和で表されるから、 $\{x\} = [\phi] \{q\} + [\bar{\phi}] \{\bar{q}\}$ $\cdots \cdots \quad (13)$

ここで⑫⑬をフーリエ変換し、式をまとめれば

$$\{X(\omega)\} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{U_i + jV_i}{-\sigma_i + j(\omega - \omega_{di})} + \frac{U_i - jV_i}{-\sigma_i + j(\omega + \omega_{di})} \right] \{P(\omega)\} \quad \cdots \cdots \quad (14)$$

$$\text{ここに、} X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-j\omega t} dt, \quad P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-j\omega t} dt$$

$$U_i + jV_i = \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T / d_i, \quad U_i - jV_i = \{\bar{\phi}_i\} \{\bar{\phi}_i\}^T / \bar{d}_i$$

⑭を次のように表す。

$$\{X(\omega)\} = [G(\omega)]\{P(\omega)\} \quad \dots\dots ⑮$$

ここに、 $[G(\omega)]$ はコンプライアンス行列である。

$$[G(\omega)] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{U_i + jV_i}{-\sigma_i + j(\omega - \omega_{di})} + \frac{U_i - jV_i}{-\sigma_i + j(\omega + \omega_{di})} \right] \quad \dots\dots ⑯$$

2.2 スペクトル法による応答解析

変位のクロススペクトル行列は次のように表される。

$$[S_{xx}(\omega)] = [\bar{G}(\omega)][S_{pp}(\omega)][G(\omega)] \quad \dots\dots ⑰$$

ここに、 $[S_{xx}(\omega)]$ ；変位のクロススペクトル

$[S_{pp}(\omega)]$ ；変動風力のクロススペクトル

ここで、サフィックスを次のように定める。すなわち、変位の着目点を k 、荷重点を l, m 、モード次数を i, j で表す。このように定義すると、⑰における着目点 k の変位のパワースペクトルは次のようになる。

$$S_{xx}^{kk}(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{nl} \sum_{m=1}^{nl} \bar{G}_i^{lk}(\omega) S_{pp}^{lm}(\omega) G_j^{mk}(\omega) \quad \dots ⑱$$

ここに、 nl ；荷重点数、 $S_{pp}^{lm}(\omega)$ ； lm 間の変動風力のクロススペクトル

荷重点 l の変動風力のパワースペクトルは⑱のように与えられる。

$$S_{pp}^{ll}(\omega) = (\rho U_l C_{Dl} A_l)^2 |X_{Al}^y(\omega)|^2 |X_{Al}^z(\omega)|^2 S_{uu}^{ll}(\omega) \quad \dots ⑲$$

ここに、 ρ ；空気密度、 U_l ；荷重点 l における平均風速、 A_l ；荷重点 l の受風面積、 $|X_{Al}^y(\omega)|^2$ ；荷重点 l の主流直角水平方向空力アドミッタンス、 $|X_{Al}^z(\omega)|^2$ ；荷重点 l の鉛直方向空力アドミッタンス、 $S_{uu}^{ll}(\omega)$ ；荷重点 l の変動風速パワースペクトル

次に、 $S_{pp}^{lm}(\omega)$ をコヒーレンス関数 $\gamma_{lm}^2(\omega)$ と位相スペクトル $\Theta_{lm}(\omega)$ を用いて表す。

$$S_{pp}^{lm}(\omega) = \gamma_{lm}(\omega) \sqrt{S_{pp}^{ll}(\omega)} \sqrt{S_{pp}^{mm}(\omega)} (\cos \Theta_{lm}(\omega) + j \sin \Theta_{lm}(\omega)) \quad \dots ⑳$$

$$\gamma_{lm}^2(\omega) = |S_{pp}^{lm}(\omega)|^2 / (S_{pp}^{ll}(\omega) S_{pp}^{mm}(\omega))$$

$$\Theta_{lm}(\omega) = \tan^{-1} (\text{Im}(S_{pp}^{lm}(\omega)) / \text{Re}(S_{pp}^{lm}(\omega)))$$

$\gamma_{lm}(\omega)$ は空間相関関数とよばれ、線形度を表す指標である。

ダavenport型を始め様々な式が提案されている¹⁾。位相スペクトル $\Theta_{lm}(\omega)$ は、テイラーの乱れの凍結に関する仮説により与えられる¹⁾。

⑳に㉑を代入し、パーセヴァルの定理の適用および⑱式の実部は偶関数、虚部は奇関数であることを考慮すると、着目点 k の変位の分散は次式ようになる。

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{nl} \sum_{m=1}^{nl} \{ \text{Re}(\bar{G}_i^{lk} G_j^{mk}) \cos \Theta_{lm} - \text{Im}(\bar{G}_i^{lk} G_j^{mk}) \sin \Theta_{lm} \} \gamma_{lm} \sqrt{S_{pp}^{ll}} \sqrt{S_{pp}^{mm}} d\omega \quad \dots\dots ㉑$$

変位応答の最大値の期待値は極値分布から得られるが、紙面の制約上説明を略す。詳細は文献¹⁾を参照されたい。

3. 数値解析およびまとめ

解析方法の妥当性を検証するために数値解析を行った。解析の対象は外筒支持型煙突とした。外筒支持型煙突とは、煙道である内筒を大口径の外筒で支持する形式の煙突である(例えば図1)。当該煙突では、渦励振防止及び耐震性向上を図るために、内筒・外筒間にオイルダンパーが設置されている。解析モデルを図2に示す。

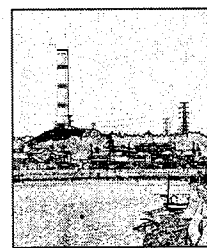


図1 外筒支持型煙突例

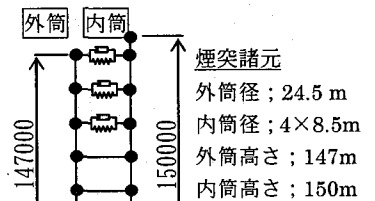


図2 解析モデル

減衰項を考慮した複素固有値解析結果と非減衰実固有値解析結果を表1に示す。応答に寄与する2次モードまでを示しており、空力減衰は無視している。

次に、提案法を用いてガスト応答解析を行い、実固有値に基づく従来法解析と時刻歴法による解析とを比較した。内筒頂部変位の最大値(期待値)を表2に示す。提案法と時刻歴法の対応は良好であるが、従来法との対応は不良である。パワースペクトルを図3に示す。提案法(実線)と時刻歴法(一点鎖線)は0.6~0.8Hzに緩やかなピークがあるが、従来法(破線)にはみられない。

以上の解析の結果、提案法は時刻歴法(高精度)と良好に対応しており、提案法の妥当性が確認できた。

表1 固有値解析結果

No.	複素固有値		実固有値
	f(Hz)	h	f(Hz)
1	0.577	0.296	0.522
2	0.787	0.222	0.933

表2 内筒頂部変位

	$\delta(\text{mm})$
提案法	27.5
従来法	24.4
時刻歴法	26.8

風荷重条件
 $U_{10}=36\text{m/s}$
 べき指数
 $\alpha=0.1$
 乱れ度
 $I_{10}=0.162$

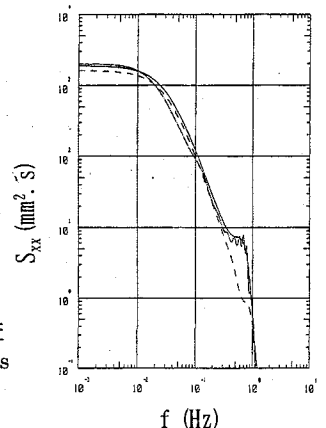


図3 内筒頂部変位のパワースペクトル

注) 従来法による応答解析は、複素固有値解析から得られた減衰定数を用いて行った。

参考文献

- 岡内功、伊藤學、宮田利雄：耐風工学、丸善、1977
- 長松昭男：モード解析、倍風館、1985