# ゲームの逆推定における誤差項間の系列相関に関する一考察

㈱情報企画　正会員　○奥本孝之
鳥取大学工学部　正会員　喜多秀行
鳥取大学工学部　正会員　谷本圭志

## 1. はじめに

「ゲームの逆推定法」は，同種のゲームを多数観測し，ゲームの結果とその影響要因に関するデータから利得関数（利得とそれを規定する影響要因との関係式）を推定する手法である[1]．この手法は，明示的に取り扱う影響要因以外の非観測要因の影響が互いに独立で同一の確率分布をするものと仮定し利得関数のパラメータを推定しているが，誤差項間に系列相関が存在しそれに起因する推定バイアスが発生する可能性が指摘されている．しかし，本当にこのような系列相関が存在するかどうかについてはほとんど不明である．そこで本研究では，実験データを用いて系列相関の有無およびその程度を検証し，モデル選択のための指針を得ることを目的とする．

## 2. ゲームの逆推定法と誤差項間の系列相関

ゲームの逆推定法においては，同一の選好構造を有する多数のプレイヤーが同時並行的に複数のゲームを行っている状況を想定している．ゲームのプレイヤー相互間では利得や均衡解選択基準（均衡解が複数存在する場合）が共通知識となっているが，分析者（ゲームを外部から観測する者）は完全には知り得ない．そのため，分析者は利得を規定していると考えられる主たる要因を説明変数とする以下のような利得関数を想定し，個々のゲームの結果と説明変数の値に関する観測データから利得関数のパラメータを推定する．

$$U_{ij}^k = V_{ij}^k + \varepsilon_{ij}^k \tag{1}$$

$$V_{ij}^k = \sum_m \alpha_m x_{m,ij}^k + \gamma$$

ここに，$U_{ij}^k$ は利得，$V_{ij}^k$ はその確定項，$\varepsilon_{ij}^k$ は誤差項，$x_{m,ij}^k$ は利得の $m$ 番目の説明変数，$\alpha_m, \gamma$ はパラメータ，$k$，はプレイヤー，$i$，$j$ は各プレイヤーの戦略を示す添字である．

本研究では，簡単のため2×2戦略型ゲームを対象とする．このゲームを，誤差項を明示した利得関数で表示したものが表1である．

表1　誤差項表示をしたゲームの利得表

| 1＼2 | 戦略1 | 戦略2 |
|---|---|---|
| 戦略1 | $\alpha V_{11}^1+\varepsilon_{11}^1, \alpha V_{11}^2+\varepsilon_{11}^2$ | $\alpha V_{12}^1+\varepsilon_{12}^1, \alpha V_{12}^2+\varepsilon_{12}^2$ |
| 戦略2 | $\alpha V_{21}^1+\varepsilon_{21}^1, \alpha V_{21}^2+\varepsilon_{21}^2$ | $\alpha V_{22}^1+\varepsilon_{22}^1, \alpha V_{22}^2+\varepsilon_{22}^2$ |

当初提案されたゲームの逆推定法では，誤差項 $\varepsilon_{ij}^k$ は互いに独立であるとの仮定がおかれている．しかし，同一の状況下で戦略を選ぶゲーム理論では，共通する非観測要因が少なからず存在し，したがって誤差項間の系列相関を考慮する必要がある．このことを考慮するため，誤差項を以下のように分解する．

$$\varepsilon_{ij}^k = \theta_1\lambda_1 + \theta_2\lambda_2 + \beta\nu \tag{2}$$

ここに，$\lambda_1$ は $\varepsilon_{i1}^k$ と $\varepsilon_{i2}^k$ に共通する誤差項，$\lambda_2$ は $\varepsilon_{1j}^k$ と $\varepsilon_{2j}^k$ に共通する誤差項，$\nu$ は独立な誤差項である．$\theta_1$，$\theta_2$，$\beta$ はパラメータであり，$\theta_1^2+\theta_2^2+\beta=1$ なる関係にある．

以上のようにして導き出された均衡解の生起確率を基に，尤度関数 $L(\alpha,\lambda,\theta/X)$ を構成し，最尤推定法を用いてパラメータ推定を行う．そしてパラメータ推定を行うとともに尤度比を推定する．尤度比が本研究で用いる推定精度を表す指標である．ただし，本研究ではここで説明したモデルを“系列相関を考慮したモデル”とし，パラメータを $\theta_1=\theta_2=0$，$\beta=1$ と固定して分析を行う“系列相関を考慮しないモデル”の２つのモデルで分析する．

## 3. シミュレーションデータを用いた分析

ここでは、データに内在する誤差項間の系列相関の大きさと、系列相関の大きさを示すパラメータの推定値との関係を、シミュレーションデータを用いて分析する。用いたシミュレーションデータは、利得関数の確定項を構成するパラメータと説明変数の値を適宜設定した後、ある（$\theta_1, \theta_2, \beta$）の組み合わせの下で、系列相関を有する誤差項 $\lambda_1$，$\lambda_2$ および無相関の誤差項 $\nu$ の値を乱数で与えて利得を作成し、この利得を用いてゲームの結果をシミュレーションしたものである．

データの分析に際しては、尤度が最大になるよう（$\theta_1$, $\theta_2$,

$\beta$) を探索し系列相関を考慮することができるよう改良されたモデルで系列相関の大きさを示すパラメータ($\theta_1$, $\theta_2$)の値を推定し、設定した系列相関の大きさと比較することにより、２つのパラメータ($\theta_1$, $\theta_2$)の値がデータに内在する系列相関の大きさを良好な対応関係にあるか否かを検討した。

図 1 に結果の一例を示す．シミュレーションデータは乱数発生させた誤差項にパラメータ $\beta$ を 0.1～0.9 まで変化させ、$\theta_1=\theta_2=\sqrt{(1-\beta^2)/2}$ としたものである．誤差項を構成する各パラメータにおけるシミュレーションデータでの値と推定結果はほぼ等しい値が得られた．このことから，推定して得られたパラメータは実際のパラメータと良好な一致を示すことが確認できる．

図２は，上記のモデルと（$\theta_1$, $\theta_2$, $\beta$) =(0, 0, 1)に固定したモデルの尤度比を対比したものである．系列相関を考慮したモデルではから系列相関を考慮したモデルによる尤度比が系列相関を考慮しない尤度比よりも高いことから系列相関を考慮することが尤度比を向上させると推測することができる．

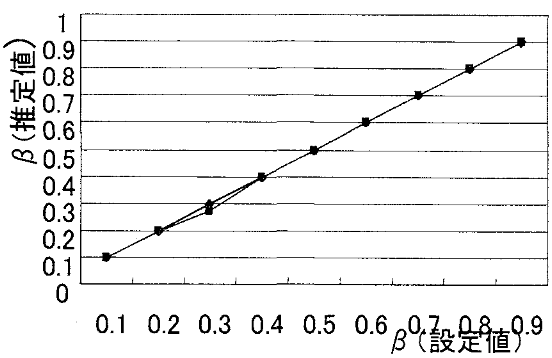


図１　$\beta$ の設定値と推定値の対応

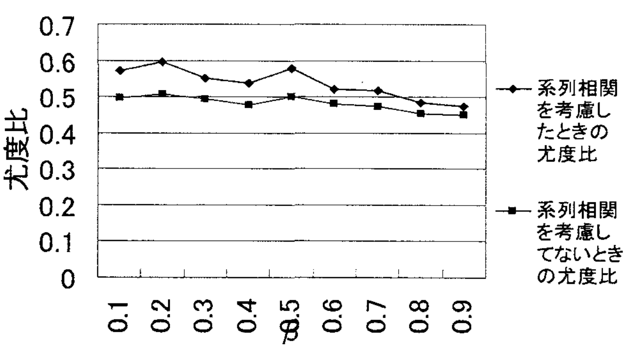


図２　系列相関の考慮の有無による尤度比の差違

## 4.　実験データを用いた分析

次いで，室内実験によるデータを収集し，系列相関の有無を分析した．ここで行ったゲームは，２人のプレイヤーがトリップを行う際に同行するか否かを選択する者で，被験者が車を選択すれば駐車料金を 2 人で負担することができ，運転も交代で行えるために運転時間も半分となる．もし，1 人が車で行くならば全て 1 人で負担しなめればならない．鉄道は 1 人で行動しても 2 人でしても変化はない．

表 2 実験で用いたゲーム

| | 車 | | 鉄道 | |
|---|---|---|---|---|
| 車 | 運転時間<br>+駐車料金, | 運転時間<br>+駐車料金 | 運転時間<br>+駐車料金, | 運転時間<br>+駐車料金<br>+待ち時間 |
| 鉄道 | 運転時間<br>+駐車料金<br>+待ち時間, | 運転時間<br>+駐車料金 | 運転時間<br>+駐車料金<br>+待ち時間, | 運転時間<br>+駐車料金<br>+待ち時間 |

得られたデータを基に系列相関の有無を分析したところ，いずれの場合にも$\theta_1$, $\theta_2$は比較的大きな値をとり，系列相関の存在が確認された．列相関を考慮せずに利得関数の全ての説明変数を考慮した場合，②系列相関を考慮して利得関数の 1 つの説明変数を除いて解析した場合，③系列相関を考慮せずに利得関数の 1 つの説明変数を除いて解析した場合，の 3 つの分析を行い，系列相関が存在する場合にはそれを考慮すべきことが明かとなった．

表 3　　実験結果

| | 被験者1 | 被験者2 | 被験者1 | 被験者2 | 被験者1 | 被験者2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 運転時間（分） | -0.05316 | -0.01434 | -0.05416 | -0.01734 | -0.05316 | -0.01434 |
| 駐車場代（円） | -0.00032 | -0.00028 | - | - | - | - |
| 運賃（円） | -0.00146 | 0 | -0.00136 | 0 | -0.00146 | 0 |
| 所要時間（分） | -0.02947 | 0 | -0.02947 | 0 | -0.02947 | 0 |
| 待ち時間（分） | -0.03573 | 0 | -0.03373 | 0 | -0.03573 | 0 |
| 尤度比 | | 0.320 | | 0.297 | | 0.277 |

## 5.　おわりに

本研究では、まずシミュレーションデータを用いてゲームの逆推定における誤差項間の系列相関の大きさと誤差分布の系列相関パラメータの推計値との関係を明らかにし、次いで実験データを基に、実際のゲームにおける系列相関の有無を検証した．その結果，検討した範囲ではゲームの誤差項間に系列相関が存在する場合が多く，系列相関があるにもかかわらずそれを考慮しなければ推定精度が著しく損なわれる可能性があることも明らかになった．

【参考文献】

1）Kita,H, K.Tanimoto and K.Fukuyama:A GameTheoretic Analysis of Merging-Giveway.Interaction -A Joint Estimation Model , *In* Taylor, M.A.P.(ed,): Transportation and Traffic Theory , Pergamon, 2002.