3次元設計空間における形態形成の最適化問題

広島大学　正会員　○有尾 一郎
Bath Univ.　H.A. Kim

1. はじめに

構造物の形態は，その構造物の目的や用途などに応じて既設の標準的な構造物の形状をもとに，その設計条件を満足するように材料や寸法などが人為的に修正され，最終的な形状・断面等の構造形態が決められる．しかしながら，構造物が大型化すると(あるいは省量化が必要な場合),「無駄な贅肉(材料)を切り落とし，必要な筋肉を必要な部分に配置する」といった軽量かつ丈夫な構造形態そのものを設計する必要性に迫られる．

本研究は，応力のローカルルールを定義した上で，その応答系を設計変数(剛性)にフィードバックさせる非線形反復システムによって構造形態を創生する方法を開発した．既往の手法の欠点であった要素の復活を可能とすると共に，応力応答を設計変数にフィードバックするシステムによって，概形デザインの骨組構造としては，十分な形態レイアウトであり，2次元および3次元のMichellの問題においても満足な解析結果が得られた．この解析法によって，構造物の形状レイアウト設計や材料配置問題に対して，構造工学的に有用で自由度の高いデザインが可能となると思われる．

2. 形態形成の理論

ここでは、古典的なMichellトラスの最適化構造(1904)に着眼し、最近のローカルな部材応力に主眼を置いた構造形態の反復形成法について述べる[3]．

(1) 形態形成の考え方

ある設計領域 Ω を M 部材からなる有限の設計変数

$$\boldsymbol{x} = \left(\cdots, x^{(m)}, \cdots\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^M \ \ \text{in} \ \ \Omega \qquad (1)$$

で満たされるものとする．すなわち，設計領域は

$$\Omega = \int \mathrm{d}\Omega = \lim_{\mathrm{d}\Omega\to 0} \sum_{m}^{(1/\mathrm{d}\Omega)\in\mathbf{Z}} \mathrm{d}\Omega^{(m)} \approx \sum_{\substack{m\gg 1\\ \mathrm{d}\Omega\propto 1/m}} \mathrm{d}\Omega^{(m)} \propto \sum_{\substack{m\gg 1\\ x^{(m)}\propto 1/m}} x^{(m)} \quad \cdots\cdots \ (2)$$

と有限の部材断面積で敷き詰められるものとする．離散数 m が大きくなれば，この均質な設計領域 Ω は格子トラスでマイクロストラクチャー的に敷き詰められることとし，均等な格子トラスを用いることで離散化によるモデルの生成および形態創生が容易であり，複雑な設計領域や設計条件にも柔軟に対応できることも利点がある．

(2) 本手法

本研究では，剛性行列の修正は各部材の応力応答のフィードバック系とし，これが釣合式を満たすように剛性を制御する．

いま，初期設計変数 $\boldsymbol{x}_{(0)}$ を設定し，荷重制御や変位制御によって釣合点 $(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{x}_{(0)})$ が得られたとしよう．このときの，部材応力は

$$\sigma_{\min} \le \sigma^{(m)} \le \sigma_{\max}, \quad m = 1, \cdots, M \ \cdots \ (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = \mathcal{W}\left(\boldsymbol{u}_{(\nu)}\right), \quad \nu = 0, 1, \cdots \ \cdots\cdots \ (4)$$

と，各部材の変形状態の関数とする．ここに，ν は反復回数を，$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} = (\cdots, \sigma^{(m)}_{(\nu)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}_{(\nu)} = (\cdots, u^{(m)}_{(\nu)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$ をそれぞれ表すこととする．さらに，現在の設計変数(剛性)$\boldsymbol{x}_{(\nu)}$ を次の $\boldsymbol{x}_{(\nu+1)}$ に還元するために，還元率 γ を定義するとともに，新たな設計変数は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{(\nu+1)} &= \mathcal{F}\left(\gamma, \boldsymbol{\sigma}_{(\nu)}\right), \\ &= \mathcal{F}\left(\gamma, \mathcal{W}\left(\boldsymbol{u}_{(\nu)}\right)\right) \quad \nu = 0, 1, \cdots \ (5)\end{aligned}$$

と反復され，当然剛性行列も更新されることになり

$$J(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{x}_{(\nu+1)})\widetilde{\boldsymbol{u}}_{(\nu+1)} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial p}\widetilde{p} \qquad (6)$$

の釣合方程式の解を $(\boldsymbol{u}_{(\nu+1)}, p, \boldsymbol{x}_{(\nu+1)})$ を求めるこ

となる[1]．この解を式 (4) に再び代入することで，一連の反復計算を行い，応力あるいは変位の収束条件を満たすようにすればよい．すなわち，節点変位と新しい設計変数は釣合式の反復計算より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{(\nu)} &= \boldsymbol{F}\left(p, \boldsymbol{x}_{(\nu)}\right), \\
\boldsymbol{x}_{(\nu+1)} &= \mathcal{F}\left(\gamma, \mathcal{W}(\boldsymbol{u}_{(\nu)})\right), \quad \nu = 0, 1, \cdots \quad (7)
\end{aligned}
$$

と表すことができる．$\gamma, p, \mathcal{W}$ が与えられれば，多元多重型の非線形反復式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{(\nu+1)} &= \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\cdots \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_{(0)}))), \\
&= \mathcal{F}^{\nu}(x_{(0)}), \quad \nu = 0, 1, \cdots, \quad \cdots\cdots \quad (8)
\end{aligned}
$$

として記述できる．この研究では，応力や変位の制約条件をできるだけ単純なローカルルールを採用し，反復計算によって構造形態の位相 (レイアウト) を明確にしていく手段をとる．

3. Michell の最適構造問題

最近の構造形態形成に関する逆解析の発展によって，この平面問題は計算力学において最適化構造の試行および検証用標準モデルとして，よく用いられる[2]．

(1) 三次元空間上の Michell 最適化問題

拡張的な Michell モデルの問題として，三次元空間上の形態形成問題を考える．

図–1(a) に示す 3 次元対称梁空間モデルを想定し，両端部の水平中央面上の 4 点で固定支持され，その梁中央位置の中央点のみに鉛直下向きの荷重を作用させたときの 3 次元空間上の最適な形状を創生する．最大剛性は初期剛性の 20 倍とし，還元率は 0.8%とした．そのときのプロセス結果を**図–1**(b)-(d) に示す．荷重作用点と結合している部材が最大部材力を示し，**図–1**(c) から同図 (d) へと劇的に部材の減少が起こった．

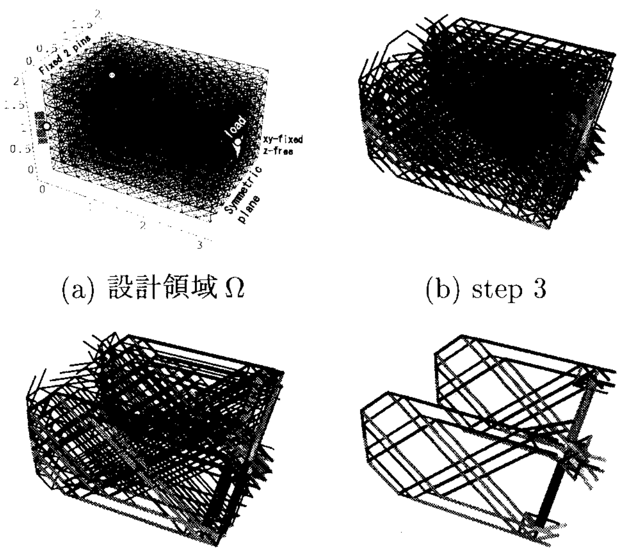
4. 結 語

本論文の成果は以下のとおりである。

1. ある設計領域に荷重条件および境界条件が任意に与えられても、大規模離散化モデルを用いることで設計領域内の力の流れを部材剛性に反映させ、系全体の構造形態を形成させることができた。
2. Michell(1904) の理論的な最適化モデルをベンチモデルとして、本手法によって数値解析的に形態形成結果として再現でき、3 次元に拡張した最適形態の創生が可能となった。

[1] いま、この解は荷重制御にて変位ベクトル $\boldsymbol{u}_{(\nu+1)}$ を求めたこととして表記する．

[2] この問題は Michell の最適トラス問題として知られている[1)]．



(a) 設計領域 Ω　(b) step 3　(c) step 5　(d) step 30

図– 1 Michell の三次元形態解析 (12 × 8 × 8 mesh)

参考文献

1) A. G. M. Michell , The limits of economy of material in framed structures, Phil. Mag. (Series 6), 8, 589-597 (1904).
2) M. P. Bendsoe and N. Kikuchi , Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, 197-224 (1988)
3) I. ARIO and T. ISHII, Structural Design using Repeated Stiffness Control, Proc. of the second Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, Vol.2, 821-826 (2002).