# 誤差項の系列相関がゲームの逆推定に及ぼす影響に関する一考察

鳥取大学工学部　正会員　喜多　秀行
鳥取大学工学部　正会員　谷本　圭志
鳥取大学大学院　学生会員　○奥本　孝之

## 1．背景と目的

従来，ゲーム理論は規範モデルとして利用されるが，現象解析モデルとしてあまり利用されてはこなかった．これは現象解析モデルでは結果から利得を推定する必要があるが，利得を推定することは容易ではなかったことが理由の一つと考えられる．そこで著者らは利得と均衡解選択確率の同時推定法[1]を開発した．

このモデルでは利得をランダム効用関数と仮定し，ゲーム理論が利得の比較で均衡解が決定されるのをロジットモデルで表現し，その同時確率から均衡解の生起確率を作り，最尤推定法を用いてパラメータを推定することで利得を推定する．

しかし，このモデルは，誤差項の独立性を仮定しているため系列相関が存在する場合にバイアスが生じる可能性があるという問題がある．ゲームでは同一の状況下で戦略を選ぶことから各利得の誤差項間において系列相関の存在が懸念される．そこで著者らはこの問題を解決するために既存の研究[2]をもとにモデルの改良を行った．

しかし，本当にゲームにおいて系列相関は存在し，それがどの程度結果に影響を及ぼすかついては分からない．そのため，本研究では系列相関の程度を数値解析で測定し，どのような場合にどの程度系列相関が存在するか明らかにすることを目的とする．

また，本研究では，均衡解選択基準[3]に関して実験を実施したデータを用いて分析を行った．そして，上述のように系列相関を分析する．

## 2．本研究の仮定

本研究では均質な選好構造を有する多数のプレイヤーが同時並行的に複数のゲームを行う離散選択モデルに基づいた世界を想定する．ゲームのプレイヤー相互間では利得や均衡解選択基準が共通知識となっているが，ゲームを外部から観測する分析者には未知であると考える．このとき均衡解はある均衡解選択基準に基づいて選択されると考える．また，本研究では概往研究で提唱されている均衡解選択基準のうちの利得支配型とリスク支配型が単独で成立するものと考える．この二つはHarsanyi and Selten[4]によって提唱された最も古典的な均衡解選択基準でため分析の対象とする．

## 3．利得と均衡解選択確率の同時推定法

まず，生起確率について説明をする．本研究で想定するゲームは $2\times 2$ の戦略型ゲームである．この場合，均衡解（1，1）の生起確率は以下のようになる．

**表１　ゲームの利得表**

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $U^1{}_{11}, U^2{}_{11}$ | $U^1{}_{12}, U^2{}_{12}$ |
| 2 | $U^1{}_{21}, U^2{}_{21}$ | $U^1{}_{22}, U^2{}_{22}$ |

$$
\begin{aligned}
P_{11} = &\left(\frac{e^{U^1_{11}}}{e^{U^1_{11}}+e^{U^1_{21}}}\cdot\frac{e^{U^1_{12}}}{e^{U^1_{12}}+e^{U^1_{22}}}\cdot\frac{e^{U^2_{11}}}{e^{U^2_{11}}+e^{U^2_{12}}}\cdot\frac{e^{U^2_{21}}}{e^{U^2_{21}}+e^{U^2_{22}}}\right)\\
&+\left(\frac{e^{U^1_{11}}}{e^{U^1_{11}}+e^{U^1_{21}}}\cdot\frac{e^{U^1_{12}}}{e^{U^1_{12}}+e^{U^1_{22}}}\cdot\frac{e^{U^2_{11}}}{e^{U^2_{11}}+e^{U^2_{12}}}\cdot\frac{e^{U^2_{22}}}{e^{U^2_{21}}+e^{U^2_{22}}}\right)\\
&+\left(\frac{e^{U^1_{11}}}{e^{U^1_{11}}+e^{U^1_{21}}}\cdot\frac{e^{U^1_{21}}}{e^{U^1_{22}}+e^{U^1_{12}}}\cdot\frac{e^{U^2_{11}}}{e^{U^2_{11}}+e^{U^2_{12}}}\cdot\frac{e^{U^2_{21}}}{e^{U^2_{21}}+e^{U^2_{22}}}\right)\\
&+\gamma\left(\frac{e^{U^1_{11}}}{e^{U^1_{11}}+e^{U^1_{21}}}\cdot\frac{e^{U^1_{22}}}{e^{U^1_{22}}+e^{U^1_{12}}}\cdot\frac{e^{U^2_{11}}}{e^{U^2_{11}}+e^{U^2_{12}}}\cdot\frac{e^{U^2_{22}}}{e^{U^2_{12}}+e^{U^2_{22}}}\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

式（1）では誤差項は相互に独立性が仮定されている．しかし，同一の状況下で戦略を選ぶゲーム理論の世界では，非観測要因はそれぞれのプレイヤーの各戦略間でほとんど同一であると考えられることから，分析の際に系列相関を考慮する必要があると考えられる．よって，相関性のある誤差項とそうでない誤差項に分ける．前者を系列相関のある誤差項，後者を無相関な誤差項とよぶ．

$$\varepsilon = \theta \cdot \lambda + \eta \cdot \nu \tag{2}$$

$\theta, \eta$：パラメータ　$\lambda$：系列相関のある誤差項
$\nu$：無相関な誤差項

本研究で対象としている利得表はすでに説明したように $2\times 2$ 戦略型ゲームである．このゲームの利得表に対して誤差項を表示すると以下のとおりとなる．$\alpha V$ は確定項であり，$V$ は観測可能な可能な利得で $\alpha$ はパラメータである．

**表２　誤差項表示をしたゲームの利得表**

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha V+\varepsilon^1{}_{11},\ \alpha V+\varepsilon^2{}_{11}$ | $\alpha V+\varepsilon^1{}_{12},\ \alpha V+\varepsilon^2{}_{12}$ |
| 2 | $\alpha V+\varepsilon^1{}_{21},\ \alpha V+\varepsilon^2{}_{21}$ | $\alpha V+\varepsilon^1{}_{22},\ \alpha V+\varepsilon^2{}_{22}$ |

表１の誤差項 $\varepsilon$ は系列相関のある誤差項と無相関な誤差項に分割する．系列相関のある誤差項は以下の組において $\kappa\lambda_i$ もしくは $\zeta\lambda_i$ が各誤差項の組に対する系列相関を表す項である．$\kappa$，$\zeta$ は誤差項を構成する割合であり式(2)の $\theta$ に相当する．各パラメータには $\kappa+\zeta+\eta=1$ という制約がある．

$\varepsilon^1{}_{11}$ と $\varepsilon^1{}_{12}$ 間に存在する系列相関・・$\kappa\lambda_1$
$\varepsilon^1{}_{11}$ と $\varepsilon^1{}_{21}$ 間に存在する系列相関・・$\zeta\lambda_2$
$\varepsilon^1{}_{12}$ と $\varepsilon^1{}_{22}$ 間に存在する系列相関・・$\zeta\lambda_3$
$\varepsilon^1{}_{21}$ と $\varepsilon^1{}_{22}$ 間に存在する系列相関・・$\kappa\lambda_4$
$\varepsilon^2{}_{11}$ と $\varepsilon^2{}_{12}$ 間に存在する系列相関・・$\kappa\lambda_5$
$\varepsilon^2{}_{11}$ と $\varepsilon^2{}_{21}$ 間に存在する系列相関・・$\zeta\lambda_6$
$\varepsilon^2{}_{12}$ と $\varepsilon^2{}_{22}$ 間に存在する系列相関・・$\zeta\lambda_7$
$\varepsilon^2{}_{12}$ と $\varepsilon^2{}_{22}$ 間に存在する系列相関・・$\kappa\lambda_8$

これを誤差項に当てはめると以下のようになる．

$\varepsilon^1{}_{11}=\kappa\lambda_1+\zeta\lambda_2+\eta\nu^1{}_{11}$　$\varepsilon^1{}_{12}=\kappa\lambda_1+\zeta\lambda_3+\eta\nu^1{}_{12}$

$$\varepsilon^{1}_{21}=\kappa\lambda_4+\zeta\lambda_2+\eta\nu^{1}_{21}\qquad \varepsilon^{1}_{22}=\kappa\lambda_4+\zeta\lambda_3+\eta\nu^{1}_{22}$$
$$\varepsilon^{2}_{11}=\kappa\lambda_5+\zeta\lambda_6+\eta\nu^{2}_{11}\qquad \varepsilon^{2}_{12}=\kappa\lambda_5+\zeta\lambda_7+\eta\nu^{2}_{12}$$
$$\varepsilon^{2}_{21}=\kappa\lambda_8+\zeta\lambda_6+\eta\nu^{2}_{21}\qquad \varepsilon^{2}_{22}=\kappa\lambda_8+\zeta\lambda_7+\eta\nu^{2}_{22}$$

これを式（1）に当てはめると$\kappa\cdot\lambda_1-\kappa\cdot\lambda_4$と$\zeta\cdot\lambda_6-\zeta\cdot\lambda_7$のみ残る．よって，$\kappa\cdot\lambda_1-\kappa\cdot\lambda_4=\sigma_1 u_1$，$\zeta\cdot\lambda_6-\zeta\cdot\lambda_7=\sigma_2 u_2$とおく． $u_1$，$u_2$は標準正規分布に従う確率変数と仮定し，$\sigma_1$，$\sigma_2$はそれらに掛かるパラメータである．これらを用い，均衡解（1，1）の生起確率は次のように求める．

$$P_{11}=\iint p(1,1\,|\,u_1,u_2)\cdot f(u_1)\cdot f(u_2)\,du_1du_2 \qquad (3)$$

他の均衡解も同様にして求めることができる．

以上のようにして導き出された均衡解の生起確率を基に，尤度関数$L(\alpha,\ \sigma_1\sigma_2/V)$を構成し，最尤推定法を用いてパラメータ推定を行う．以上の手順は詳しくは参考文献1を参照されたい．

## 4. 実験と実験データについて

本研究では実験データを用いて分析を行う．被験者(プレイヤーのこと)には表3のような利得表を配布し，縦プレイヤーとしてゲームを行ってもらう．そのとき被験者にとって対戦相手は未知である．被験者に利得最大化戦略をとらせるために，得点に応じて報酬を支払う．具体的には20点当たり1円とした．また，被験者は10人であり，サンプル数は約180である．また，一回のゲームをおこなう時間は30秒とし，互いにコミュニケーションができないようにした．全体の実験の時間は約1時間であった．被験者は鳥取大学社会開発システム工学科システム計画学研究室の学生である．

**表3　実験で用いた利得表**

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | *x, x* | *x,　0* |
| 2 | *0, x* | *1200, 1200* |

## 5. 分析結果

結果を以下の表とグラフにまとめた．これらの結果において特徴的な点を次のようにまとめた．

a) *600≦x* のとき系列相関が小さい

b) *300≦x≦500* のときは尤度比が低い

c) 確定項の値が小さいほど系列相関が大きい

d) 尤度比が低いケースに系列相関が高い傾向がみられる

e) $\sigma_1=\sigma_2$となった

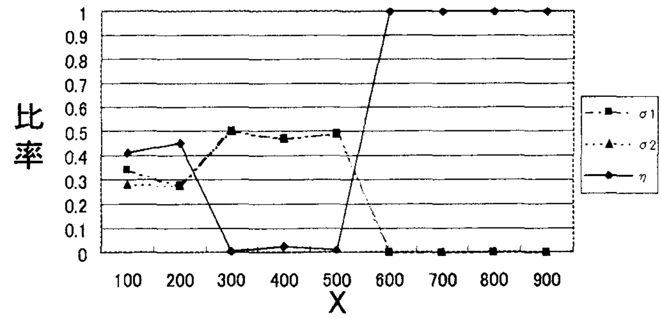


**図1　誤差項における系列相関と無相関な誤差項の比率**

以上の結果から確定項の値が小さい場合に系列相関が高い傾向が見られた．これは確定項の差が誤差項と比較して小さい場合には誤差項が推定結果に多大な影響を及ぼすが，確定項の差が誤差項と比較して大きい場合誤差項は推定結果には影響を及ぼさないため系列相関を考慮する必要はないからだと考えられる．またこの場合には尤度比も高かった．e)の$\sigma_1=\sigma_2$であることはプレイヤー1とプレイヤー2では同質のプレイヤーであるので当然のことと考えられる．

## 6. おわりに

本研究では系列相関の測定を行ったが，系列相関を調べることは有効であることが実証された．

**【参考文献】**


1) Kita, H, K.Tanimoto and K. Fukuyama: A Game Theoretic Analysis of Merging-Giveway.Interaction -A Joint Estimation Model,*In* Taylor, M.A.P.(ed, ): Transportation and Traffic Theory , Pergamon, 2002

2) 森川高行，山田菊子：系列相関を持つ RP データと SP データを同時に用いた離散選択モデルの推定法，土木学会論文集，No. 476/IV-21，pp11～18，1993，10

3) 岡田章：ゲーム理論，有斐閣，1996

4) Harsanyi and Selten: A General Theory of Equilibrium Selection in Games :MIT Press, Cambridge, 1988


**表4　分析結果**

| | 100 | | 200 | | 300 | | 400 | | 500 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | 0.001357 | 0.002 | 0.0015 | 0.0023 | 0 | 0 | 0 | 0.0001 | 0 | 0.00001 |
| αX | 0.14 | 0.2 | 0.3 | 0.46 | 0 | 0 | 0 | 0.04 | 0 | 0.005 |
| γ1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| γ2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0.5 |
| σ1 | 0.34 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.47 | 0.00 | 0.49 | 0.00 |
| σ2 | 0.28 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.50 | 0.00 | 0.47 | 0.00 | 0.49 | 0.00 |
| η | 0.41 | 1.00 | 0.45 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 | 0.01 | 1.00 |
| 尤度比 | 0.66 | 0.66 | 0.65 | 0.65 | 0.10 | 0.01 | 0.11 | 0.04 | 0.14 | 0.07 |

| | 600 | | 700 | | 800 | | 900 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | 0.003625 | 0.003625 | 0.000767 | 0.000767 | 0.001 | 0.001 | 0.001795 | 0.001795 |
| αX | 2.17 | 2.17 | 0.54 | 0.54 | 0.8 | 0.8 | 1.62 | 1.62 |
| γ1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| γ2 | 1E-07 | 1E-07 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.00 | 0.00 |
| σ1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| σ2 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| η | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 尤度比 | 0.50 | 0.50 | 0.13 | 0.13 | 0.24 | 0.24 | 0.45 | 0.45 |

表の見方：$\alpha$：式(2)のパラメータ $\alpha,\gamma_1,\gamma_2$：均衡解選択確率，$\sigma_1,\sigma_2,\eta$：前の2つは系列相関，$\eta$は無相関な誤差項