平板に剛球が衝突した際の局所変形を考慮した近似計算法

松江工業高等専門学校　正会員　○柴田　俊文
北海道大学大学院　フェロー　三上　隆
㈱地崎工業　正会員　須藤　敦史

1．はじめに

梁や平板などの構造要素の衝撃挙動を把握するためには，衝撃体と被衝撃体との間に生じる局所変形を考慮し，衝撃力を評価することが重要である．局所変形を考慮して構造要素の振動を計算する場合，非線形積分方程式である修正 Hertz 理論に基づいて解析する必要があるが，方程式を解く際の煩雑な計算を避けるため，局所変形を線形のばねに置き換え，衝突体と局所変形をばね-質量系として解析する例も数多い．本研究では，平板と剛球の衝突を取り上げ，局所変形部のばね定数の導出方法を示し，数値適用性を検討する．

2．解析手法

図-1 に示すように一辺の長さ $L\times L$，厚さ h の四辺単純支持の平板を考え，平板の中央に質量 m_c の剛球が初期速度 v_0 で衝突すると仮定する．ここで平板の弾性係数を E，密度を ρ とする．局所変形をばね定数 k_1 の線形のばね（等価剛性と称する）に置き換えると，衝突時の平板と剛球の運動方程式は以下の二式となる．

$$m_c\frac{d^2u_1}{dt^2}+k_1(u_1-u_2)=0 \tag{1}$$

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=k_1(u_1-u_2)\delta(x-x_c)\delta(y-y_c) \tag{2}$$

ここで $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$，ν はポアソン比，w は平板の変位，(x_c,y_c) は平板の中央の座標であり，平板の減衰は無視している．本研究では平板はモード解析により計算を行い，時間積分には Newmark β 法を採用した．初期条件は剛球の初期速度が v_0，剛球の変位と平板の変位・速度は 0 である．剛球と平板との相対変位 0 の条件を境に二物体は分離し，剛球は等速直線運動，平板は自由振動を始める．その後，相対変位が正になると再度二物体は接触する．なお，衝撃力は次式で表される．

$$f=-m_c\frac{d^2u_1}{dt^2}\quad \text{or}\quad f=k_1(u_1-u_2) \tag{3}$$

ここで，u_1 は剛球の変位，u_2 は平板中央の変位を示す．

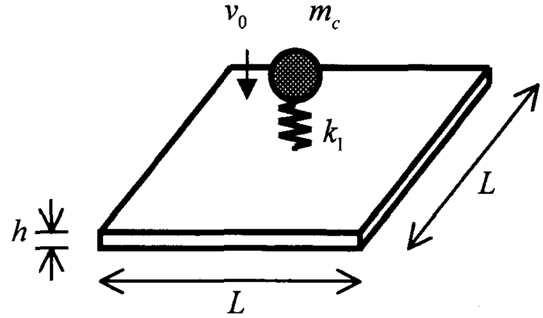

図-1　解析モデル

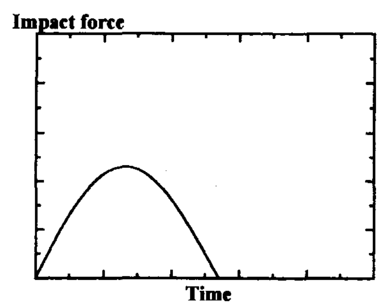

図-2　衝撃力波形（導出に使用）

表-1　導出に用いるパラメータ

パラメータ	導出に用いた値
初期速度 (v_0/c)	1.0×10^{-6}，1.0×10^{-5} 1.0×10^{-4}，1.0×10^{-3}
一辺の長さ (L/h)	10，50，80，100
剛球の質量 $(m_c/\rho h^3)$	1.0×10^{-3}，1.0×10^{-2} 1.0×10^{-1}，1.0×10^{0}

※上記のパラメータを組み合わせて解析する

3．等価剛性の導出

等価剛性は文献 1)に基づいて以下のように導出する．

① 修正 Hertz 理論を用いて衝撃力を計算する（**図-2**）．この理論は非線形の積分方程式で表されるため，Newton-Raphson 法により解析を行う．衝撃力波形は解析諸元によって様々な形状に変化するが，ここでは正弦曲線の形状を示すものを用いる．

② ①とは別に(1)，(2)の式より衝撃力を計算する．平板はモード解析により解析する．等価剛性 k_1 の値を大きくす

ると，衝撃力の最大値は大きくなり．接触時間は短くなる．逆に小さくすると衝撃力の最大値は小さくなり，接触時間は長くなる．ここでは①で求めた衝撃力（**図-2**）と最大値，接触時間が一致するように等価剛性 k_1 を定める．

③ ①と②の解析を(1)速度，(2)平板の一辺の長さ，(3)剛球の質量，の三種類のパラメータを4通り（計64通り，**表-1**）に変化させて行う．ただし，c は縦波の速度で $c=\sqrt{E/\rho}$ により表される．**図-3** に示すように速度及び質量と等価剛性は冪乗に比例するという結果が得られた．

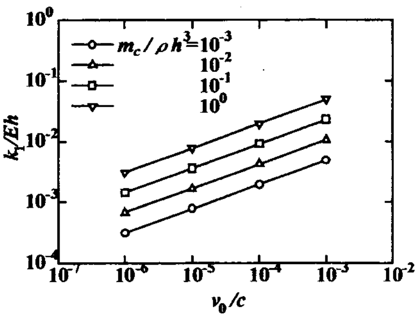

図-3 等価剛性と初期速度の関係（$L/h=10$）

④ ③より等価剛性を求める式を式(4)で仮定する．

$$k_{dy}\Big/k_{st} = f_1 \cdot f_2\left(m_c\Big/\rho h^3, M_0\Big/\rho h^3\right)\cdot f_2\left(v_0\Big/c\right) \qquad (4)$$

$$\text{ここに } f_1=\alpha,\quad f_2=\left(\frac{1}{m_c\Big/\rho h^3}+\frac{1}{M_0\Big/\rho h^3}\right)^{\beta},\quad f_3=\left(v_0\Big/c\right)^{\gamma}$$

ここで式中の k_{st} は，三次元の有限要素法で離散化した平板の中央に静的に集中荷重を載荷し，その載荷地点の変位の逆数により求めた剛性（静的等価剛性）である．②と③で定めた等価剛性の値から最小二乗法を用いて，式(4)の α，β 及び γ を決定する．これが等価剛性 k_1 を求める式であり，k_{dy}（動的等価剛性）で表されている．計算した結果，$\alpha=3.358\times10^2$，$\beta=-1/3$，$\gamma=2/5$ の値が得られた．

4．解析結果

図-4 に解析結果を示す．平板の自由度は100を用い，時間刻み Δt は解析対象である平板の基本周期の1/1000になるように設定した．なお，衝撃力（縦軸），時間（横軸）ともに無次元化して波形を表示している．破線が修正Hertz理論をNewton-Raphson法で解いた結果で，実線が本研究で提示している解析方法による衝撃力波形である．

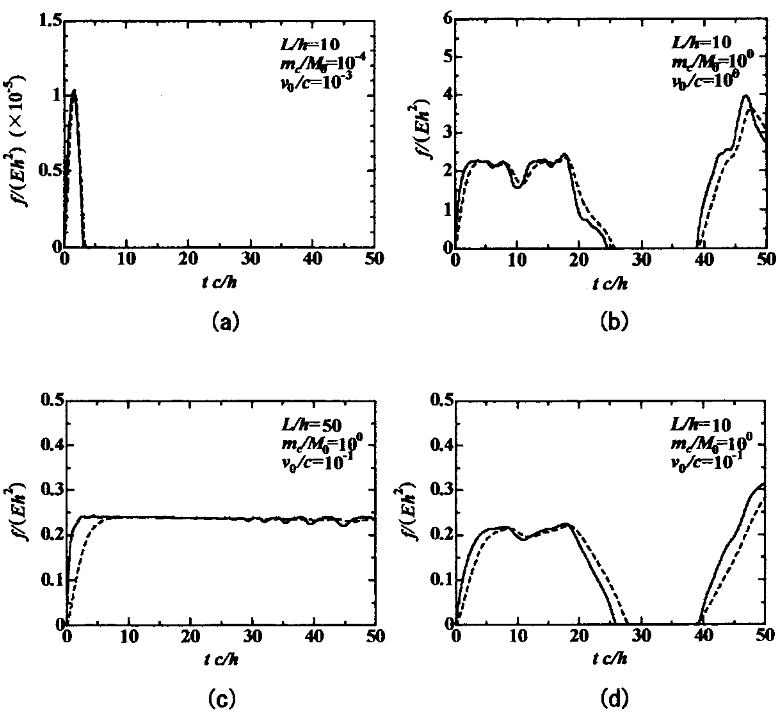

図-4 衝撃力波形（解析結果）

(a)が3．の①と同様に正弦曲線の形状を示す場合で，(b)，(c)，(d)はそれ以外の形状を示すものであり，それぞれ図中の右上に諸元を示している．ただし，M_0 は平板の質量を表す．これらの解析結果より，いずれの場合も良好に衝撃力波形を近似していることがわかるが，(c)の場合，最初の立ち上がり部に若干の差が見られる．(c)は平板の一辺の長さが長い場合であり，さらに文献1)の梁の場合でも梁の長さが長い場合，(c)と同様の結果が示されている．このことから，一辺の長さが長い場合，修正Hertz理論の非線形性が強く表れることが推察される．

参考文献

1)柴田俊文，三上隆，佐藤昌志，須藤敦史：剛球の梁への衝突における衝撃力の近似計算法，土木学会論文集，N0.647/Ⅰ-51，pp.167-176，2000.