反復計算法による構造物の位相最適化

岡山県庁　○飯居 紅美子
広島大学　　有尾 一郎

1.　研究背景

連続体構造物の位相最適化問題は，現在盛んに行われており，Kikuchi ら[1)]による均質化設計法や Ramm ら[2)]によるアダプティブ位相最適化による研究が代表的である．しかし，対象となる構造物が複雑になるにつれて，計算量が多くなり，収束性，ソリッド要素と空隙要素が交互に並ぶ数値的不安定現象（チェッカーボード），また非線形性やメッシュ依存性等の様々な問題があり，より正確で安定した位相を求めるのは容易ではない．

本研究では，微視的な構造物の力学的挙動が巨視的な構造全体の力学的挙動に影響するといったマルチスケール法の考えに基づき，構造系を仮想的に弾性格子トラスで離散化して構造物全体の剛性の最大化を目的とした非線形反復法を用いて，位相最適化を行うことを目的とする．

2.　構造形態の定式化

本解析手法の最適化問題は，

$$\boldsymbol{x} = \left\{\cdots, EA^{(m)}, \cdots\right\}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{M} \;\rightarrow\; \max \quad \cdots\cdots \;(1)$$

$$\text{subject to :}\qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{x}) \;=\; \mathbf{O},\qquad EA^{(m)} \leq EA_{\,max},$$

と書ける．ここに，$\boldsymbol{x}$は，設計変数としての各部材剛性，m は要素番号をそれぞれ表す．剛性の最大化はコンプライアンス（外力仕事）の最小化を意味し，各部材応力の平均値を基準として，各部材の剛性（断面積）を変化させることによって，より剛性の高い形態を形成する．

非線形釣合方程式$\boldsymbol{F}$の釣合点近傍で Taylor 展開し，局所線形化を行うと，増分釣合式

$$J\tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial p}\tilde{p} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{O} \qquad (2)$$

となる．ここに$\tilde{\bullet}$は増分変数であり，J は接線剛性行列である．

剛性行列の修正は，各部材の応力レベルに起因するフィードバック系とし，この応答を用いて釣合式を満たすように剛性を変化させると節点変位と新しい設計変数は釣合式の反復計算より

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \gamma\frac{|\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)}|}{\overline{\sigma}_{(\nu)}}\boldsymbol{x}_{(\nu)} = \boldsymbol{x}_{(\nu+1)}, \quad \nu = 0, 1, \cdots \;(3)$$

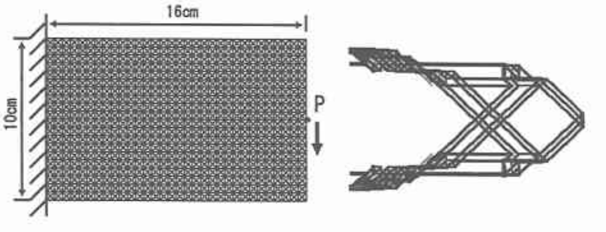
$$\overline{\sigma}_{(\nu)} = \frac{1}{M}\sqrt{\sum_{m=1}^{M}(\sigma_{(\nu)}^{(m)})^2}, \quad m = 1, 2, \cdots, M$$

と表すことができる．ここに，γは部材の収束率を制御するための還元率とする．したがって，典型的な多元多重型の非線形反復式

$$\boldsymbol{x}_{(\nu+1)} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{(\nu)}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\cdots \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{(0)}))), \qquad = \boldsymbol{f}^{(\nu)}(x_{(0)}), \quad \nu = 0, 1, \cdots \;\cdots\cdots\cdots\; (4)$$

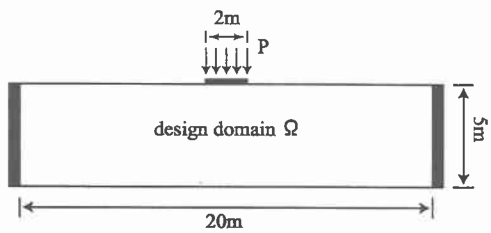
となる．

3.　片持ち梁の形態形成

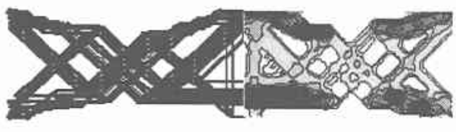


(a)　コート掛け問題　(b) 解析結果

図− 1　コート掛け問題

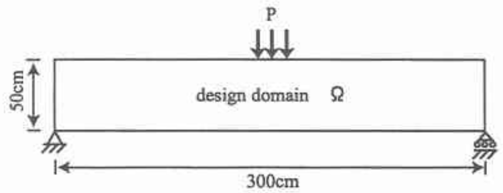


(a) 解析モデル



(b)　解析結果

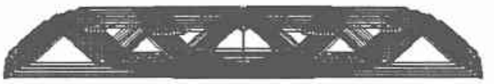
図− 2　両端固定梁問題



(a) 解析モデル

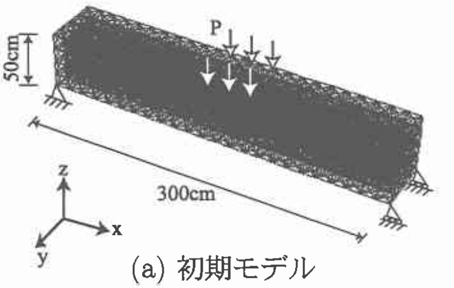
(b) step 1

(c) step 5

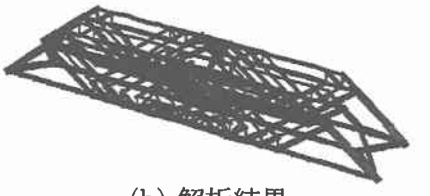


(d) step 30

図− 3 単純支持梁の形態解析



(a) 初期モデル



(b) 解析結果

図− 4 3次元場における梁モデルの形態形成

位相最適化問題において，固定端からある位置に荷重 P を載荷するときの構造形態を設計する「コート掛け問題」はよく適用される例の一つである．近年では Ramm ら[2)]が両端固定梁モデルにおける最適解を導いている．

図–1(a) に示す設計領域を 20 × 32 要素のユニットセルで離散化し，形態形成を行った．設計変数である部材剛性の初期値はすべて単位剛性 ($EA_0 = 1.0$) とし，許容最大剛性を $EA_{\max} = 6EA_0$，荷重レベルは $\tilde{p} = P/EA_0 = 2.0 \times 10^{-3}$ とした．**図–1**(b) に示す最終形態の総部材数は初期部材数の約 15 %に減少した．この形態は支持点付近では曲げモーメントに抵抗するように強固に部材が配置されており，荷重点付近ではせん断変形に抵抗するように斜めに部材が配置されている．また両端固定では**図–2**のように，アーチアクションと曲げモーメントに抵抗する強固な形態となっていることが分かる．

4. 梁モデルの形態形成

単純支持梁モデルによる位相最適化問題を考える．解析モデルを**図–3**(a) に示す．メッシュ分割は 20 × 120 分割とし，2.5cm × 2.5cm のユニットセルで満たされている．なお，モデルの左右対称性を考慮して 1/2 領域で解析を行う．各パラメータは，$EA_0 = 1.0$，$EA_{\max} = 10EA_0$ とし，荷重レベルは $\tilde{p} = 1.0 \times 10^{-3}$ とした．**図–3**(b)〜(d) は，繰り返し計算の各ステップで得られる形態を示している．反復計算の初期では，部材要素と空隙要素が交互に現れる数値的不安定要素が見られるが，最終ステップでは非常にはっきりとしたワーレントラス橋のような位相が現れているのがわかる．

解析モデルを 3 次元場に拡張し**図–4**(a) に示す．3 次元場では要素量が増大し，ユニットセルの寸法が大きくなってしまうが，本解析手法では**図–4**(b) に示すように，3 次元のワーレントラス橋の位相が現れた．

5. 結論

- 本解析手法を用いて片持ち梁モデルの解析を行い，既往の手法で得られた解と酷似する解を得た．
- 大規模な分割を有する梁モデルの解析の際に，問題とされていた数値的不安定現象はみられず，力学的にかなった明確な位相を得た．
- 構造系を仮想格子トラスで満たし，単純な局所反復ルールに基づいたアルゴリズムを用いることで，最適な構造形態を創生できた．

参考文献

1) K. Suzuki and N. Kikuchi : A homogenization method for shape and topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.93, pp.291-318, 1991.

2) S. Schwarz, K. Maute and E. Ramm : Topology and shape optimization for elastoplastic structural response, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190**, 2135-2155, 2001.