

Liapunov 指数によるカオス挙動の動的安定性

広島大学 学生会員 ○海田 辰将 *1
 広島大学 正会員 有尾 一郎 *1
 広島大学 正会員 藤井 堅 *1

1. はじめに

Duffing 系の振動は強い非線形性を示すことから、その挙動が複雑となることが知られており、「カオス」と呼ばれる予測困難かつ応答を急激に拡大させる現象が発生し、構造物にとって危険な状態となり得る。

近年の Duffing 振動解析において、Moon and Holmes は (1979) は井戸型ポテンシャル系のカオス応答について調べており、Cook ら (1991) の実験的検証によって簡単な系にもカオスが発現することが確認された。また、Nawrotzki ら (2000) は動的安定性の判別に Lyapunov 指数が有効であることを指摘しており¹⁾、有尾ら (2001) はミーゼストラスの非線形振動解析を行い、解の位相的構造を調べている。

しかしながら、構造工学の分野においてカオス現象の安定性を述べた文献は少なく、その説明は現在でも困難な課題である。本研究ではモデルを図-1に示す弾性 4bars-truss とし、系の幾何形状が動的挙動に及ぼす影響に力点を置いてカオス挙動の動的安定性について数値解析を行う。また、系の動的安定性の判別には初期値鋭敏性を考慮して Lyapunov 指数を採用した。

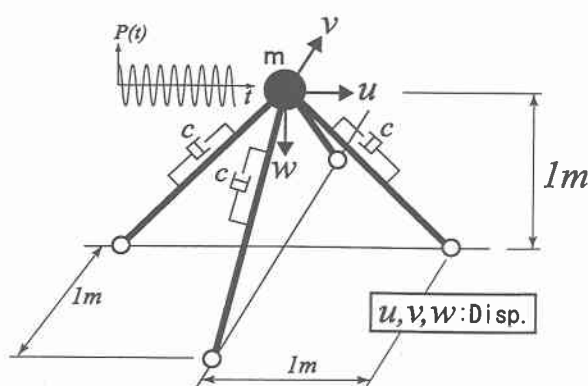


図-1 4bar-truss モデル

2. 解析条件および Lyapunov 指数

(1) 非線形 Duffing 方程式

本解析における運動方程式は復元力項が非線形となる多元連立 Duffing 方程式であり、増分形式で表すと

$$M\delta\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\delta\dot{\mathbf{u}}(t) + J(\delta\mathbf{u}(t)) = \delta\mathbf{p}(t) \quad (1)$$

となる。ここで、復元力項の $J(\delta\mathbf{u}(t))$ は系のポテンシャルエネルギーから導かれた各節点の非線形復元力である。本解析では単位長さあたりの部材剛性 $EA/l_0 = 1[\text{kN/m}]$ 、質点の質量 $m = 1[\text{kg}]$ に設定した。また、強制外力として $\delta\mathbf{p}(t) = \{0, 0, f_0 \cos \omega t\}^T [\text{kN}]$ を載荷した場合を考え、主経路上の系の動的挙動に着目する。なお、運動方程式を解く際、完全系とし、時間間隔は $\Delta t = 0.1[\text{sec}]$ で $t = 22\pi[\text{sec}]$ まで計算を行った。

(2) Lyapunov 指数 Λ による動的安定性

本解析では、解の大局的な挙動を把握するために、時間を $t = 2\pi$ 毎に区切り、周期解として応答を得る。この周期解を用いて Lyapunov 指数 Λ を計算する。Lyapunov 指数は 1 次元離散力学系 $x_{n+1} = f(x_n)$, ($n = 0, 1, \dots$) について、近接した 2 点 $x_0, y_0 = x_0 + \delta$, ($\delta \ll 1$) から出発した 2 つの解軌道が $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \rightarrow$ のときどのくらい離れていくかを表す指数である。すなわち、初期値鋭敏性から動的安定性を判断し、 Λ の正負がそれぞれ不安定と漸近安定に対応する。

3. 解析結果

(1) $\omega - w$ アトラクタ

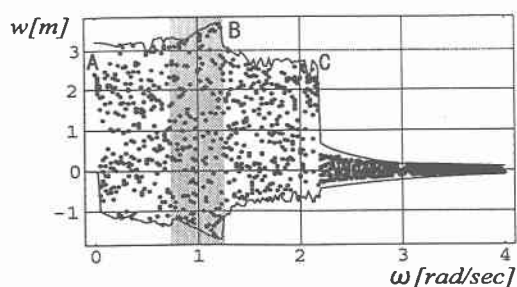
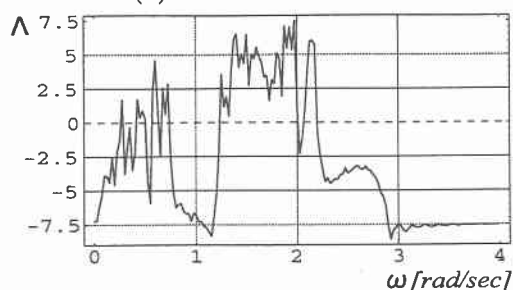
外力の円振動数 ω をパラメータ変化させることにより、Duffing 振動の変位応答特性を調べた。

図-2(a) は $f_0 = 1[\text{kN}]$ に対する $\omega - w$ アトラクタを示す。 ω が小さいときには頂点鉛直変位 w は図中の点 A から漸増し、点 B の $\omega = 1.2[\text{rad/sec}]$ で最大となる。その後、 w は次第に減少し、点 C において急激に初期位置に収束する。図中外形の実線は最大振幅を示している。

図-2(b) にこのときの Lyapunov 指数 Λ の変化を示す。 $0 < \omega < 0.3[\text{rad/sec}]$ のとき、 Λ は始め負値とな

⁰ key words: Duffing's oscillator, geometrical nonlinearity
 Lyapunov exponents, resonance, chaos attractor

^{*1} 〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1

(a) $w - \omega$ アトラクタ

(b) Liapunov 指数

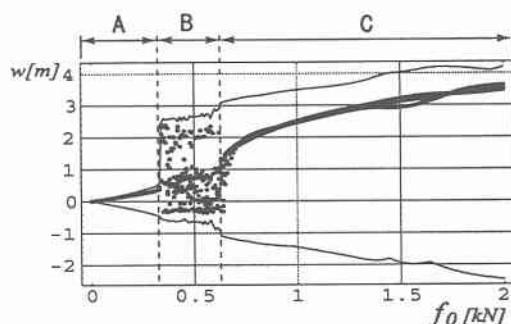
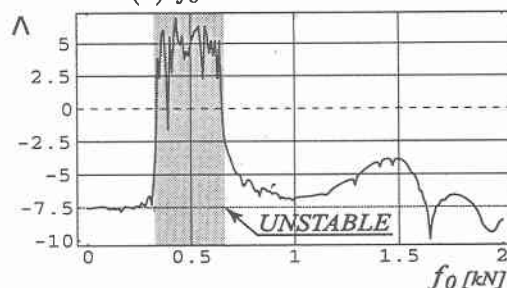
図-2 ω に対する系の安定性 ($f_0 = 1[\text{kN}]$)

るが次第に増加し、 $\omega = 0.2[\text{rad/sec}]$ で初めて正值となつて動的不安定を示す。図中薄灰色で示した区間になると、その軌道は非常に安定し、 Λ は負値となつて周期軌道を示すが、この区間では共振によって応答は大きくなる。その後、再び系の剛性と外力が微妙なバランスで釣り合い、不規則振動となる。 $\omega > 2.2[\text{rad/sec}]$ となると急激に Λ は負値を示し、漸近安定を示す。これは、短い周期の外力であるために外力が頂点に作用してから変位が大きく生じる（動的飛移りが生じる）までの間に再び外力の作用する方向が変わるため、結果として変位がほとんど生じないことに起因する。

(2) $f_0 - w$ アトラクタ

ここでは変化させるパラメータを周期外力の振幅 f_0 として、アトラクタから系の動的挙動特性を探る。外力の円振動数を $\omega = 1[\text{rad/sec}]$ としたときの解析結果を図-3に示す。図-3(a)において、周期解が定常となる区間と分散する区間に全く分かれることが特徴的である(A~C)。Aにおいて周期解は線形に増加しているが、この区間では周期外力に対して幾何剛性の方が大きいため、図-3(b)に示す Λ の値からも系は f_0 に対して定常振動となる。

次に、区間Bになると、AとBの境で解が分散し、初めて系の Dynamic snap-through が発現して系が動

(a) $f_0 - w$ アトラクタ

(b) Lyapunov 指数

図-3 f_0 に対する系の安定性 ($\omega = 1[\text{rad/sec}]$)

的不安定となる。この値を境に系の応答が急激に拡大し、複雑な挙動となるため、工学的に注意が必要となる。この複雑な挙動は、周期外力の大きさと系の幾何剛性による非線形復元力の大きさが微妙なバランスで釣り合うためと考えられ、この区間における系の応答は周期外力を載荷しているにも関わらず、不規則波形を示す。従つて、この周期解の拡大および不規則振動は前項で述べた共振とは全く別の要因によって引き起こされている。区間Cになると再び急激に周期解は収束し、応答は周期的であることを示す。

4. 結論

- 共振が起こると応答は大きくなるが、Lyapunov 指数ではその応答は周期的であり、動的安定と判断される。
- 周期外力の最大振幅があるレベルに達すると突然周期解が大きく分散し、カオスの挙動となつて動的不安定となった。

参考文献

- 1) Nawrotzki, P. and Eller, C. : Numerical stability analysis in structural dynamics, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.189, pp.915-929, 2000.