被圧地下水の最適揚水に関する研究

広島工業大学大学院　学生会員　○沖山　啓一郎
広島工業大学工学部　フェロー会員　二神　種弘

1．はじめに

本研究は、差分法と線形計画法を併用して開発された差分動的線形計画法を用いて、被圧滞水層からの非定常最適揚水に関する研究を行うものである。差分動的線形計画法は、差分法と動的線形計画法を併用した分布定数系の最適化手法である。本研究では、目的関数を揚水量の総和としている。また、計算機容量と計算量を大幅に縮減するための効率的計算法を工夫したので、これについて述べる。

2．差分動的線形計画法による非定常地下水の最適制御

2.1 基礎偏微分方程式系

1) 目的関数　$Z = Opt.f(\{h\},\{\theta\})$　(throughout Ω)　(1)

subject to :

2) 状態方程式

(1) 浸透流の基礎方程式　$S\dfrac{\partial h}{\partial t} = T\nabla^2 h - \theta - Q$　(in Ω)　(2)

(2) 初期条件　$h = H^0$　(at t=0)　(3)

(3) 境界条件　$\dfrac{\partial h}{\partial n} = 0$　(on Γ_1)　(4)　,　$h = H_b$　(on Γ_2)　(5)

3) 制約条件　$h \geq \underline{H}$　(6)　,　$\theta \leq \overline{\Theta}$　(7)

4) 変数非負の条件　$h \geq 0$　(8)　,　$\theta \geq 0$　(9)

ここで、h：状態変数（地下水頭）, θ：決定変数（制御可能揚水量）, Q：制御不可能揚水量, S：貯留係数, T：透水量係数, $\underline{H}$：状態変数下限（最低の地下水水頭要求値）, $\overline{\Theta}$：決定変数上限値（制御可能揚水量の上限値）, Ω：全解析領域, $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$：境界

2.2 差分動的線形計画法による定式化

基礎偏微分方程式系を離散化するために差分法を用いると、差分動的線形計画法の定式化を得られる。

1) 目的関数　$Z = Opt.\sum_{\tau=1}^{T}\left(\sum_{n=1}^{N} c_n^\tau h_n^\tau + \sum_{i=1}^{I} e_i^\tau \theta_i^\tau\right) \approx Max.\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\Delta t\,\theta_i^\tau$　(10)

subject to :

2) 状態方程式　$-[A]\{h_n^{\tau-1}\} + \{h_n^\tau\} + [D]\{\theta_i^\tau\} = \{f_n^\tau\}$　(τ=1～T)　(11)

3) 制約条件　$[G]\{h_n^\tau\} \geq \{\underline{H}_l^\tau\}$　(τ=1～T)　(12)　,　$\{\theta_i^\tau\} \leq \{\overline{\Theta}_i^\tau\}$　(τ=1～T)　(13)

4) 変数非負の条件　$\{h_n^\tau\} \geq \{0\}$　(14)　,　$\{\theta_i^\tau\} \geq \{0\}$　(15)

ここで、c_n^τ, e_n^τ：目的関数係数, Δt：時間増分, τ=1～T：時間ステップ番号, n=1～N：格子点番号（状態変数番号）, i=1～I：制御可能揚水井戸番号（決定変数番号）, l=1～L：水頭規制番号

３．効率的計算法による解法

線形計画法の解法は、２段階シンプレックス法が一般的である。この方法は、(1)第Ⅰ段階（初期基底解を見つける計算）、(2)第Ⅱ段階（最適解を求める計算）からなり、人工変数の導入により莫大な計算量と計算機容量を必要とする。しかし本研究では、制御可能揚水量を非基底変数（$\{\theta_i^\tau\}=0$）とすることで容易に初期基底変数を見つけることができ、第Ⅰ段階の計算を不要とする効率的計算法を工夫した。得られた初期シンプレックスタブローを表１に示す。表１において、

表1. 動的差分線形計画法の効率的計算法の初期シンプレックスタブロー

基底変数	コスト係数	定数	コスト係数								
			Δt	Δt	Δt	0	0	0	0	0	0
	①	②	決定変数			スラック変数					
			$\{\theta_i^1\}$	$\{\theta_i^2\}$	$\{\theta_i^3\}$	$\{\chi_i^1\}$	$\{\chi_i^2\}$	$\{\chi_i^3\}$	$\{\gamma_i^1\}$	$\{\gamma_i^2\}$	$\{\gamma_i^3\}$
$\{\chi_i^1\}$	0	$\{p_i^1\}$	E_1^1			$-I$					
$\{\chi_i^2\}$	0	$\{p_i^2\}$	E_1^2	E_2^2			$-I$			0	
$\{\chi_i^3\}$	0	$\{p_i^3\}$	E_1^3	E_2^3	E_3^3			$-I$			
$\{\gamma_i^1\}$	0	$\{\bar{\Theta}_i^1\}$				I			I		
$\{\gamma_i^2\}$	0	$\{\bar{\Theta}_i^2\}$		0			I			I	
$\{\gamma_i^3\}$	0	$\{\bar{\Theta}_i^3\}$						I			I
目的関数	(①-②)		$-\Delta t$	$-\Delta t$	$-\Delta t$	0	0	0	0	0	0
			シンプレックス基準								

$$[E_k^\tau]=-[G][D_k^\tau]\,(16),\quad \{P_l^\tau\}=\{\underline{H}_l^\tau\}-[G]\{F_n^\tau\}\quad (17)$$

$$[D_\tau^k]=[D]\,(k=\tau)\,(18),\quad [D_\tau^k]=[D_{k+1}^\tau]\,(k=\tau\text{-}1\sim1)\quad (19)$$

$$\{F_n^\tau\}=\{f_n^\tau\}+[A]\{F_n^{\tau-1}\}\,(20),\quad \{F_n^0\}=[A]\{H_n^0\}\quad (21)$$

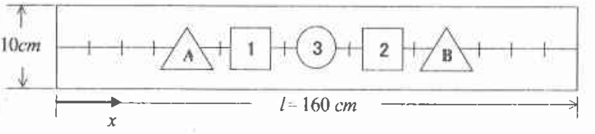


図１　解析モデル

４．計算例

図１に示す被圧帯水槽モデルにおける最適揚水制御解析を以下の条件で行った。解析結果を図２に示す。

［計算条件］

時間ステップ番号：$\tau=1\sim8$，時間増分：$\Delta t=30\ (sec)$

透水係数：$T=0.01(cm^2/sec)$

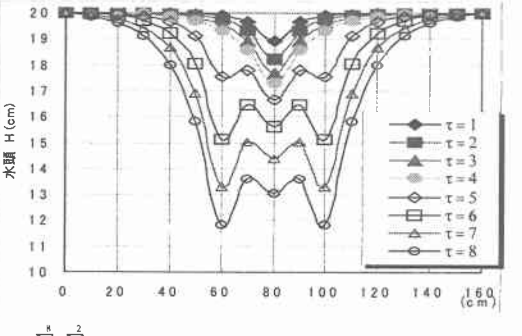
境界条件：$h(x=0)=h(x=l)=20.0\ (cm)$

貯留係数：$S=5\times10^{-3}$，初期水頭：$\{H_n^0\}=\{20.0\}(cm)$

△での水頭規制下限：　$\{h_{A,B}^\tau\}\geq\{\underline{H}_{A,B}^\tau\}=\{18.0\}(cm)$

□での制御可能揚水量上限：$\{\theta_{1,2}^\tau\}\leq\{\bar{\Theta}_{1,2}^\tau\}=\{5.0\}(cm^3/sec)$

○での制御不可能揚水量：$\{Q_3^\tau\}=\{2.0\}(cm^3/sec)$



$$Z=\sum_{\tau=1}^{8}\sum_{i=1}^{2}\Delta t\,\theta_i^\tau$$
$$=30\times(0.0+0.0+0.0+0.0+0.0+0.0+0.0+0.0+2.85+2.85+5.00+5.00+5.00+5.00+5.00+5.00)=1071.0\ (cm^3)$$

図２　最適水頭分布と目的関数値

５．結語

本研究で工夫された差分動的線形計画法の効率的計算は２段階シンプレックス法による一般的な解法と比べ、人工変数を導入しないため、大幅に変数を減少させ計算機量と計算時間が大幅に縮減でき、誤差の集積が起こらず、計算精度が良く安定した解を得ることが可能となる。よって、本研究で工夫した計算法は、大規模問題の解析に有効な手法となる。

― 参考文献 ―

(1) 小山昭雄：線形計画入門, 日本経済新聞社. (2) Aguado,E.and Remson, I : Ground-Water Hydraulics in Aquifer Management, Proc. of ASCE. Vol.100, No. HY1, pp.103～118, 1974. (3) 上田・神野・長野：広領域地下水からの最適取水について,土木学会論文報告集,第 283 号, pp.33～43, 1979 年 3 月. (4) T.Futagami, N.Tamai and M.Yatsuzuka : "FEM Coupled with LP for Water Pollution Control" , J. Hyd. Div. ASCE, Vol, 101, No. HY7, 1976, pp.881～897.