剛体-回転ばねモデルの分岐ダイヤグラム

兵庫県市川町 正会員 ○青木 真人
広島大学 正会員 有尾 一郎

1. 本研究の目的

ニュートン・ラフソン反復計算などの非線形反復数値解析において，定常安定解を得る保証は，その非線形発展方程式に依存し，分岐解，カオス解あるいは不安定解の発生が問題となる．すなわち，非線形支配方程式は，その求解法によってはカオス解などの数値不安定性が内在する可能性がある．

本研究は，単純なモデルの分岐解析を通して，非線形増分型のつり合い方程式に伴う複雑な高次分岐現象の再現と解析方法の確立，および高次の安定経路の探索を目的とし，カオス挙動の発生メカニズムや分析方法について考察する．

2. 離散力学系とは

決定論的な離散力学系とは，ある連続関数 $f(x)$ を用いて反復離散解を $x_0, x_1, \cdots, x_n$としたとき

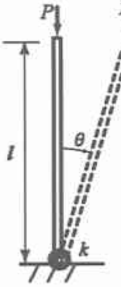
$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \cdots,\ x_{n+1} = f(x_n)$$

と記述できる力学系と定義されている．このとき $f(x)$ を知り，初期値 x_0を与えれば，写像の形で離散解 $x_0, x_1, x_2, \cdots$の状態を一意に決定することができる．ここでは，反復回数 n が十分大きいときに発生する定常安定な離散解 x_n を取り扱うことになる．

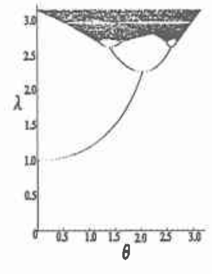
離散解は周期性を持つか否かで周期解と非周期解に分類される．周期性はリヤプノフ指数の正負によって判定される．また，リ・ヨークの定理から，離散解が3周期解を持つときカオス解を持つことが知られている．

3. 解析モデルと方法

図–1(a) に示す長さ ℓ，ばね定数 kを有する剛棒に鉛直荷重 Pが作用する構造系を考える．自由度は回転角 θのみとする．全ポテンシャルエネルギー停留の原理から得られる系のつり合い状態を非つり合い状態と考え，線形な荷重パラメータ $\lambda(= P\ell/k)$ をもつ，離散化したつり合い式を考える．この式はθ_iが決まると非線形写像の形でθ_{i+1}が一意に決まる離散力学方程式である．

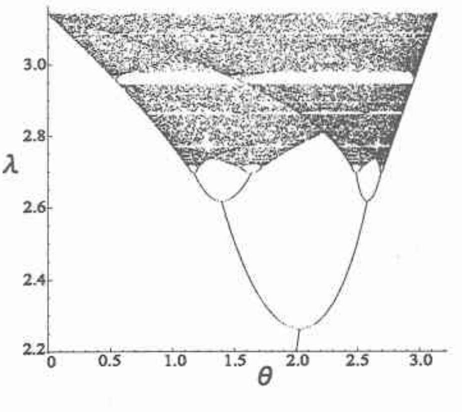


(a)1 自由度の剛体-ばね系モデル



(b) 分岐ダイヤグラム

図– 1 構造モデルと分岐ダイヤグラム



図– 2 分岐ダイヤグラム拡大図

4. 構造系の分岐ダイヤグラム

離散化つり合い式から写像により導出した定常離散解を分岐ダイヤグラムとして図–1(b) に示す．この図は，荷重パラメータλを $0 \le \lambda \le \pi$ で 0.01 ずつ離散的に増加させていき，各λで初期値$\theta_0 = 0.1$ を与え，写像によって得られる定常離散解を 100 点プロットしたものである．図–2は$\lambda > 2.2$ のときの拡大図である．

従来は$\lambda = 1$ の分岐後のつりあい経路は$\lambda = \theta/\sin\theta$ で与えられ，安定対称分岐であると考えていた．しかし，$\lambda > 2.2619\cdots$になると加速度的に分岐 (周期倍化分岐) が現れた．

5. 考察

図−3(b) は$\lambda > 2.2$におけるリヤプノフ指数Λを示したものである．$\lambda > 2.7192\cdots$では$\Lambda > 0$になり，カオス解となる．カオス状態に至った後も$\Lambda < 0$となる安定な周期窓が存在する．$\lambda = 2.95$ 付近には3周期の窓が存在し，リ・ヨークの定理から，系の挙動はカオス解を持つと判断できる．

図−4は，$\lambda = 2.5$ において不動点が不安定であることを示したものである．この場合，従来の考え方では，つり合い式$\theta = 2.5\sin\theta$の$\theta \neq 0$ の解 (不動点) が安定つり合い位置であると考えられていたが，反復計算では不動点から急速に離れていき，2 つの解を交互に導出する 2 周期解となる．周期解は，2 周期解から 4 周期，8 周期，$\cdots$と増加していき，周期倍化分岐をする．

図−5(a) は周期倍化分岐の分岐点の座標を示したものである．周期倍化分岐は相似的に**図−5**(b) に示すように変化していく．図中のα，δはファイゲンバウムの普遍定数と呼ばれるものであり，$\alpha = 2.5029\cdots$，$\delta = 4.6692\cdots$である．

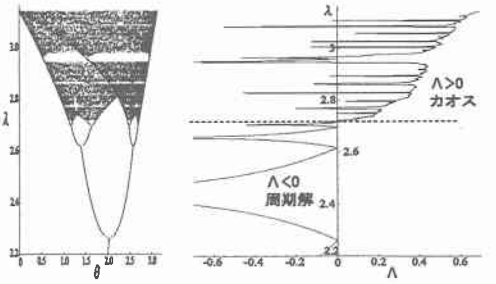
$\lambda > 2.7192\cdots$のカオス領域では，分岐ダイヤグラムの濃淡から離散解には発生の頻度が異なることがわかる．**図−6**(b) は各荷重パラメータλにおける発生確率が最大となる安定離散解を抽出したものである．系の挙動は，荷重パラメータλの増加に伴い，振幅が増大し，分岐の骨組構造が浮かび上がった．

6. 結論

1. 1自由度の剛体-ばねモデル系の離散化したつり合い式から写像によって描かれる分岐ダイヤグラムは，$\lambda = 2.2619\cdots$において周期倍化分岐が現れ，$\lambda > 2.7192\cdots$ではカオス解となった．
2. $\lambda > 2.2619\cdots$では従来は安定なつり合い位置と考えられていたが，不安定なつり合い位置となる．
3. 周期倍化分岐は，ファイゲンバウム定数α，δで相似的に縮小する．
4. 写像によって得られる分岐ダイヤグラムは高次の分岐構造を明らかにし，非線形支配方程式に対する数値不安定挙動の解明につながるものと考えられる．

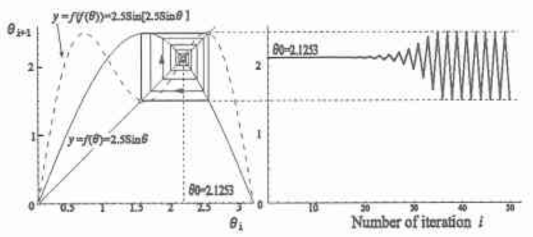
参考文献

井上政義，秦浩起:カオス科学の基礎と展開, 共立出版,1999.

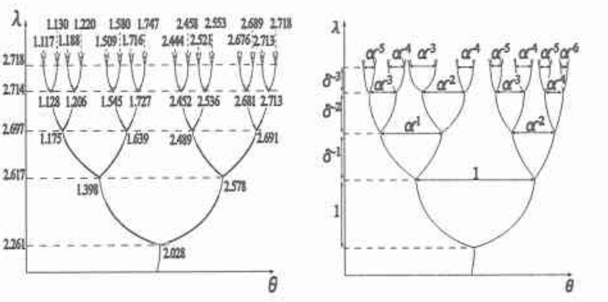


(a) 分岐図　(b) リヤプノフ指数

図− 3 リヤプノフ指数　$(2.2 \leq \lambda \leq 3.14)$

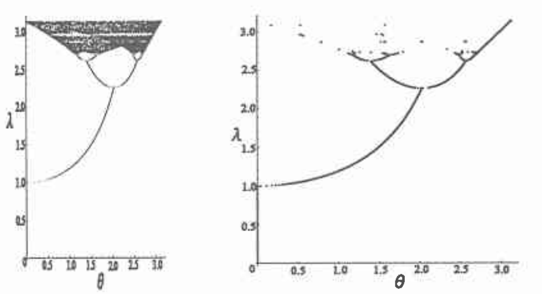


図− 4 不動点近傍に初期値を持つ解の軌道



(a) 分岐点の座標　(b) 分岐比

図− 5 分岐点の座標と周期倍化分岐の構造



(a) 分岐ダイヤグラム　(b) 発生確率最大の経路図

図− 6 1自由度剛体-ばね系の分岐ダイヤグラム