四面体有限要素モデルの修正法

岡山大学環境理工学部　正 ○ 谷口健男
九州旅客鉄道株式会社　山崎一之

1．はじめに

最近の電算機の性能向上によりさらに大規模有限要素モデルの生成要求が高まり、その要求に応えているのがデローニー三角分割法である．この方法は幾何学的空間分割法であることから、高信頼性でかつ高速の要素生成が可能であるが、反面点を増やす考え方の要素生成法でしかない．しかし、数値解の向上には場合によっては設置した点を取り除くことも要求され、その場合デローニー三角分割を初めから繰り返すという無駄が行われている．本研究では、デローニー三角分割結果から任意の点を取り除き、要素分割を修正する方法の検討を行う．

2．デローニー三角分割 [1,2]

デローニー三角分割は与えられた点を用いてそれら点群の支配する凸空間を次の条件を満たす四面体に分割する幾何学的空間分割である．その条件は，得られた四面体の外接球内にはその四面体の４構成点以外含まない，というものである．一般に，この方法では唯一の四面体分割が得られるが，例外もある．それは degeneracy と呼ばれ，例えば立方体の体積をその８頂点で四面体に分割すると複数個の解が出現する．その理由は，得られる全ての四面体は同じ外接球を有することによる．この場合デローニー三角分割の結果として得られる解（ユーザが目にする解）はプログラムに依存する．

このデローニー三角分割で任意３次元領域を四面体分割すると，得られる四面体群は下記の特徴を有する．（1）一般に得られる解（degeneracy でない場合）はユニークである．(2) degeneracy の場合、解のユニークネスが消え，幾種類かの解が出現し、ユーザが入手できる解はプログラムに依存する．(3) デローニー三角分割は凸空間の四面体分割であり，凹部にはそこを埋める形の四面体が出現する．

なお，degeneracy の場合、デローニー三角分割に導入した点の順序がその部分の分割状況を決定することが示されている．この研究より、同じ分割結果を得ようとすれば、同じ節点順序でデローニー三角分割を適用すれば良いことが分かっている．[3]

3．点削除に伴う要素再分割

n個の点に対しデローニー三角分割を適用して得た四面体群から、第ｉ番目の分割点の削除を考える．すなわち，第ｉ点を構成点とする全ての四面体を探し出し，第ｉ点のない状態に周辺の四面体群を修正することを考える．第ｉ点を構成点とする全ての四面体群から出来る多面体およびその表面三角形を poly(i)で表示し，また，この poly(i)に含まれる点群（表面上の m 個の点群と点 i）を node(m+1)、点 i を除いた点群を node(m)で表現する．

ケース１：通常の場合

通常の場合とは“poly(i)の形状が凸かつ degeneracy でない場合”を示す．第ｉ点を削除するとき，第ｉ点を構成点とする四面体群がこれら条件を見たしていると仮定する．この多面体から得られる点群 node(m+1)と node(m)に対してデローニー三角分割を適用するとき，三角分割の点の導入順序を元の四面体分割時の順序に一致させると、両多面体表面上の三角分割は一致する．従って、削除点だけ取り除いて得られる点群 node(m)に対して部分的にデローニー三角分割を適用して得られる四面体群を、空洞部に埋め込めば良い．なぜなら，node(m)に対するデローニー三角分割で得られる凸多面体の表面三角形は node(m+1)に対するデローニー三角分割の結果と完全に一致するからである．

ケース２：非凸の場合

削除点を構成点とする多面体 poly(i)の形状が非凸の場合（表面が部分的に凹凸を有していること）を考え

る．この場合，削除する点 i を構成点とする四面体群（図では三角形群）の表面の一部に凹部が存在することから，これら四面体群の構成点群を用いてデローニー三角分割すると、表面の凹部にも四面体を生成する．結果として node(m)に対してデローニー三角分割して得られた多面体表面が元の削除多面体と異なり、node(m)で得られた四面体分割結果を直接生め込むことが出来ない．しかし、凹部表面に作られた四面体を取り除けば、その内部には除去多面体と全く同じ表面三角分割をした多面体が出現することより，不要要素を排除後、この多面体を除去多面体の替わりに埋め込めば良い．

ケース 3：degeneracy の場合

デローニー三角分割は各点を導入した段階で新しい三角分割を得るが，その変更（修正）部分は導入点の関与する部分だけであり，より厳密に言えば新点を外接球内部に含む四面体だけである．よって、(i+1)番目以降の点を用いた四面体分割による i 点を内部に含む多面体表面三角分割の更新はなく、それがあるとすれば i 点以前である．以上より、第 1 から第 i までの点だけが第 i 点削除に伴う四面体修正に関与することが分かる．さらに degeneracy 以外では四面体分割は唯一に決まることからすると、三角分割が一致しないことは degeneracy がその間（第 1 から第 i-1 番目の点）で生じていたことを示している．

以上のことから、degeneracy の場合には削除対象点(i)を構成点とする四面体を拾い出し(それで得られる多面体を poly(i)とする)、さらに第 1 番目からいま拾い出された点群の最終番目の点までを対象として、poly(i)の表面上で degeneracy 条件を満たす点を全て拾い出す．この様にして拾い出された点群を対象に、元の点順序でデローニー三角分割を適用すると元の poly(i)表面の三角分割と一致する四面体集合を得ることが出来る．この結果を元の四面体集合から削除点を構成点とする全ての四面体と入れ替えればよい．

簡単な事例を図 1 に示す．これは合計 10 点の点配置状況を示す．１～８番目までの 8 個の点は立方体の頂点に置かれた点を，また点９と 10 はその立方体内部に置かれた 2 個の点である．そこで点１０を取り除いた三角分割を得ようとするのが目的である．．上に示した方法で得られた四面体群の断面状況（点 10 の排除前と排除して修正した後）を比較したのが図２－１と２－２である．両者を比較すると，立方体表面の分割は全く同じであるのに対し，内部の四面体分割は異なることが分かる．

４．あとがき

本報告では大規模有限要素モデル生成に利用されるデローニー三角分割をさらに有効に利用するためにモデル生成に利用した点を直接削除して四面体分割を修正することは可能であり、実際にその修正法を示した．

参考文献

[1] Bowyer, A. (1981) :Computing Dirichlet te-sselations, *The Computer Journal*, Vol.24-2, 162-166. [2] Watson, D.F. (1981):Computing n-dimensional Delaunay tesselation with application to Voronoi polytopes, *The Computer Journal*, Vol.24-2, 167-172. [3] Taniguchi,T. & E.Fillion(1996) : Numercal experiments for 3-dimensional flow analysis in a fractured rock with porous matrix, *Advances in Water Resources*, Vol.19, No.2, pp.97-107

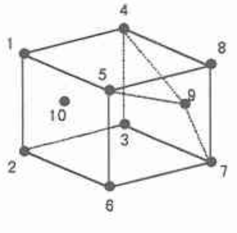

図１ テストケース

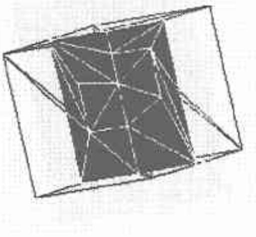

図 2-1 点削除前の分割

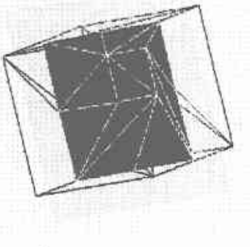

図 2-2 点削除後の分割