

## 提携形成の外部性を考慮した費用割り振り問題に関する考察

鳥取大学工学部

○学生会員 安妻裕訓

鳥取大学工学部

正会員 谷本圭志

京都大学防災研究所

正会員 岡田憲夫

鳥取大学工学部

正会員 喜多秀行

## 1. はじめに

近年、ダム事業による環境への影響を緩和するための主体 (以後、環境マネジメント主体と呼ぶ) を多目的ダム事業に含めて実施することが現実となっている。この場合、他の主体がどのような提携を形成するかで提携の費用が異なるという性質、すなわち、提携形成に関する外部性 (spillover) <sup>1)</sup> が生じる。そこで本研究では、ダム事業に参加する主体の間に外部性が存在する場合の費用割り振り法についてゲーム理論を用いて検討する。

## 2. 外部性がある場合の費用割り振りゲーム

外部性が存在する場合のゲームを表現するためには、ゲームに参加しているプレイヤーの提携形成のパターン (これを「提携構造」と呼ぶ) を明示化する必要がある。提携構造を明示化したゲームの表現形として分割関数形 (partition function form) <sup>2)</sup> がある。

ここで、分割  $B_s$  はプレイヤーの集合  $S$  の構成員がどのような提携を組んでいるかを表現したものであり、次式で表される。

$$B_s = \{B_1, B_2, \dots, B_m\} \quad (1)$$

$$(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m = S)$$

$$(B_k \cap B_h = \emptyset, 1 \leq k, h \leq m, k \neq h)$$

$B_N$  を提携構造と呼ぶ。提携構造  $B$  の下での提携  $B_k$  の費用は  $C(B_k, B)$  と表される。正 (負) の外部性は、次式のように定義される。

$$C(B_k, B \setminus \{B_h, B_s\} \cup \{B_h \cup B_s\}) \leq (\geq) C(B_k, B) \quad (\forall B_k \neq B_h, B_s \in B) \quad (2)$$

## 3. 外部性を考慮した費用割り振り法

## (1) 仁

仁は、コアが非空である場合にはコアの集合から唯一解を絞り込む方法として定義されている。一般に仁は、任意のプレイヤー  $i$  の費用割り振り費用を  $x_i$ 、任意の割り振りベクトルを  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  とすると、任意の  $X$  に対する提携  $S$  の不満  $e(X : S)$  の最大値を最小化することで

解を得る。

$$\max_S e(X : S) \rightarrow \min \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = C(N) \quad (4)$$

$$e(X : S) = \sum_{i \in S} x_i - C(S) \quad (5)$$

分割関数形で定義されるコアとして  $\alpha$  コア <sup>4)</sup> がある。 $\alpha$  コアは、ある割り振り解が与えられたときの安定的な提携構造の集合として定義されている。すなわち、任意の分割  $B_{N \setminus S}$  に対して次式を満たすプレイヤーの集合  $S$  及び提携構造  $B'_S$  が存在しないとき、提携構造  $B$  は「 $\alpha$  コア安定である」 ((6) 式)。ただし  $x_i(B)$  は、提携構造  $B$  の下でのプレイヤー  $i$  の割り振り費用である。

$$x_i(B'_S \cup B_{N \setminus S}) < x_i(B) (\forall i \in S) \quad (6)$$

$\alpha$  コアを割り振りベクトルの集合として (5) 式に即した形で再定式化すると、 $\alpha$  コアに関する不満  $e^\alpha(X : S, B)$  は以下のように導出される。

$$e^\alpha(X : S, B) = \sum_{i \in S} x_i - \min_{B_S} \max_{B_{N \setminus S}} C^*(B_S, B_{N \setminus S}) \quad (7)$$

ここに、

$$C^*(B_S, B_{N \setminus S}) = \sum_{B_h \in B_S} C(B_h, B) \quad (8)$$

である。上式より、 $\alpha$  コアは、相手の分割に関して最も悲観的という状況を想定していると考えられる。 $\alpha$  コアを絞り込んだ唯一解として  $\alpha$  仁を定式化することができる。

## (2) シャープレイ値

シャープレイ値は、全員提携に参加する過程において生じる限界費用を加重平均した解であり、一般には次式で表される。ここに  $s$  は任意の提携  $S$  に含まれるプレイヤーの数 ( $|S|$ ) である。

$$x_i = \sum_{S \ni i, S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (C(S) - C(S \setminus \{i\})) \quad (9)$$

Myerson <sup>3)</sup> はシャープレイ値が満たす公理を備えた費用割り振り解を (10) 式のように分割関数形で定義している

(以後これを「分割関数形 シャープレイ値」と呼ぶ)。

$$x_i = \sum_{(B_k, B) \in ECL} (-1)^{|B|-1} (|B|-1)! \left( \frac{1}{n} - \sum_{B_h \in B, B_k \neq B_h, i \notin B_h} \frac{1}{(|B|-1)(n-|B_h|)} \right) C(B_k, B) \quad (10)$$

ここに、 $ECL$ は任意の提携構造とそれに含まれる提携の組の集合である。また $|B|$ は、提携構造 $B$ に含まれる提携の数を、 $|B_h|$ は提携 $B_h$ に含まれるプレイヤーの数を表す。(10)式は限界費用と外部費用を等価に評価するとの仮定に基づいて定式化されていると考えられる。

### (3) 新たな費用割り振り法の提案

$\alpha$ コアは、相手の分割に関して最も悲観的な場合の交渉力を認めるとの仮定に基づいており、当該提携のそれ以外の交渉力をすべて捨象していることになる。そこで、各提携の交渉力として任意の提携構造のもとでの費用関数を認めた $\Delta$ コアを提案する。まずは、不満 $e^\Delta(X, D : B_k, B)$ を以下のように定義する。

$$e^\Delta(X, D : B_k, B) = \sum_{i \in B_k} x_i - C(B_k, B) - \sum_{h(\neq k)} d_{B_h} + (|B|-1)d_{B_k} \quad (11)$$

ただし $d_{B_k} = 0 (\forall B_k \in B, |B_k| = 1)$

ここに、 $D = \{d_{B_k}\}$ は任意の提携についての外部費用に関する調整項の項であり、正(負)の外部性がある場合には $d_{B_k} \geq (\leq) 0$ である。一人の提携を結託しても外部性は生じないため、 $|B_k| = 1$ のとき $d_{B_k} = 0$ である。

この調整項 $D$ の導入には次のような意味付けが可能である。 $\Delta$ コアでは、各提携の交渉力として任意の $B(\ni B_k)$ のもとでの費用 $C(B_k, B)$ を認めているが、この交渉力は当該提携 $B_k$ 自らのみによって得られるものではない。よって提携 $B_k$ が他の提携から受ける影響分を $-\sum_{h(\neq k)} d_{B_h}$ 、

他の提携に与える影響分を $(|B|-1)d_{B_k}$ として不満に加えることによって不満を補正している。ここに、 $D$ に関する $\sum_{h(\neq k)}$ や $(|B|-1)$ の演算は、外部費用の発生及び帰着先の提携の数を意味している。このように自らの交渉力に相当し得ない外部費用を $D$ で与えよることにより、シャープレイ値の定式化における仮定を緩めることができる。 $\Delta$ コアを定義すると、以下ようになる。

$$e^\Delta(X, D : B_k, B) \leq 0 \quad (12)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = C(N, \{N\}) \quad (13)$$

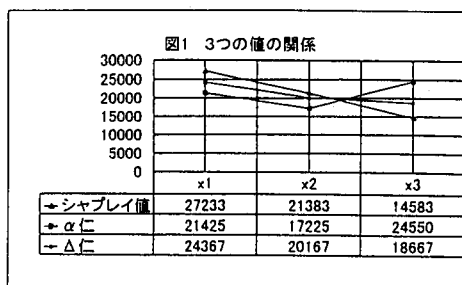
$\Delta$ コアを絞り込んで得られる唯一の解を $\Delta$ 仁と呼ぼう。 $\Delta$ 仁では $X$ に加え、 $D$ も変数となる。すなわち $D$ の値を $X$ の算出過程において規範的に求めることになる

## 4. 数値例

淀川流域の一庫ダムに環境マネジメント主体を含めて新規にダム事業を実施した場合について事例分析を行った。詳細については講演時に譲るが、 $\alpha$ 仁と分割関数形シャープレイ値を比較してみると分かるように、費用割り振りにおける仮定の差違によって得られる解がまったく異なってくる。また $\alpha$ 仁や分割関数型シャープレイ値の仮定を緩めて定式化した $\Delta$ 仁では、 $\alpha$ 仁及び分割関数形による費用割り振り費用の間に $\Delta$ 仁のそれが位置していることが明らかになった

表1 一庫ダムの費用関数

| 提携  | 提携構造        | 費用(百万円) |
|-----|-------------|---------|
|     |             | 5,000   |
| 1   | {(1)(2)(3)} | 53,400  |
| 2   | {(1)(2)(3)} | 49,200  |
| 3   | {(1)(2)(3)} | 47,700  |
| 1   | {(1)(23)}   | 53,400  |
| 2   | {(2)(13)}   | 49,200  |
| 3   | {(3)(12)}   | 31,400  |
| 12  | {(12)(3)}   | 61,800  |
| 13  | {(13)(2)}   | 82,300  |
| 23  | {(23)(1)}   | 74,800  |
| 123 | {(123)}     | 63,200  |



## 5. まとめ

本研究ではダム事業への環境主体の参加を想定した検討を行ったが、外部性が生じうるその他のケースについても検討する必要が出てくる。特に、本研究では正の外部性の発生のみ焦点を当てた検討となっているが、負の外部性が生じる場合、正負の外部性が混在して発生する場合などについても検討を行う必要がある。

### 参考文献

- 1) Bloch, F.: Non-cooperative models of coalition formation in games with spillovers, New Directions in the Economic Theory of the Environment, Edited by C. Carraro and D. Siniscalco, Cambridge, pp.311-352, 1997.
- 2) Thrall, R. and W. Lucas.: N-Person Games in Partition Function Form, Naval research Logistics Quarterly, Vol.10, 1963.
- 3) Myerson, R.B.: Values of Games in Partition Function Form, International Journal of Game Theory, Vol.6, pp.23-31, 1977.
- 4) Hart, S. and Kurz, M.: Endogenous Formation of Coalitions, Econometrica, Vol.51, pp.1047-1064, 1983.