大変形解析における 応力の回転補正に関する検討

鳥取大学大学院　学生会員　○長谷川 隆志
鳥取大学工学部　正会員　　木山 英朗，藤村 尚，西村 強

1.はじめに

増分法に基ずく解析法では,応力やひずみの速度に観測する座標系に依存しない性質つまり客観性が求められる.そのような客観応力速度の１つとしてJaumann応力速度があるが,これを用いて導入し単純せん断解析を行うと,せん断応力τとせん断ひずみγの関係に正弦波状の応答が得られることが報告されている.そこで本研究では,単純せん断による正弦振動の原因について検討を行い,それを解消するための一方法を提案する.ついで,著者らが,提案している大変形解析法FLEMにこの応力補正計算法を導入する.

2.剛体回転及び単純せん断変形解析における応力応答

Jaumann応力速度は,$[\overset{*}{\sigma}]=[\dot{\sigma}]-[\dot{\omega}]\sigma+\sigma[\dot{\omega}]$　(1)となる.

ここに$[\dot{\omega}]$は,連続体スピンと呼ばれる逆対称テンソルである

(a)剛体回転

剛体回転は次のように表される.

$\dot{u}=\dot{c}y$,　$\dot{v}=-\dot{c}x$,$\dot{c}$:正定数　　(2)

と表される.

$$\dot{\varepsilon}_x=\partial\dot{u}/\partial x=0,\quad \dot{\varepsilon}_y=\partial\dot{v}/\partial y=0,\quad \dot{\gamma}_{xy}=\partial\dot{v}/\partial x+\partial\dot{u}/\partial y=0,$$
$$\dot{\omega}_z=\frac{1}{2}\left(\partial\dot{v}/\partial x-\partial\dot{u}/\partial y\right)=\dot{c} \qquad (3)$$

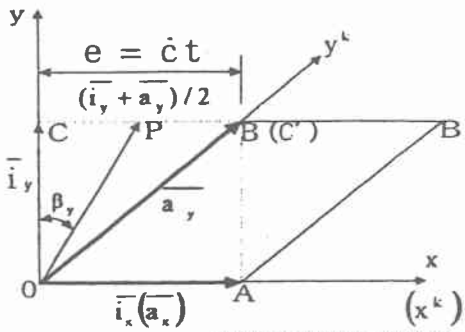


図１　座標系と単純せん断変形

初期応力(σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0)が存在したとして(3)を(1)に代入し,時刻tにおける応力の解を表すと

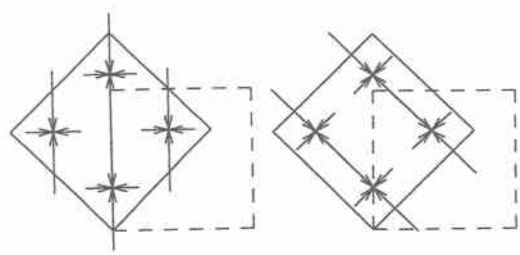
$$\sigma_x=\sigma_x^0\cos^2\phi+\sigma_y^0\sin^2\phi+(1/2)\tau_{xy}^0\sin2\phi$$
$$\sigma_y=\sigma_x^0\sin^2\phi+\sigma_y^0\cos^2\phi+(1/2)\tau_{xy}^0\sin2\phi \qquad (4)$$
$$\tau_{xy}=-(\sigma_x^0-\sigma_y^0)\sin2\phi+\tau_{xy}^0\cos2\phi \qquad ただし\ \phi=\dot{c}t$$

これは、初期応力の座標変換であり、自然な結果である.

(b)単純せん断変形

単純せん断変形は次のように表される.

$\dot{u}=\dot{c}y$, $\dot{v}=0$, $\dot{c}$:正定数　　(5)



(a)回転補正なし　　(b)Jaumann応力速度

図２　剛体回転

これより，$\dot{\varepsilon}_x=0$,　$\dot{\varepsilon}_y=0$,　$\dot{\gamma}_{xy}=\dot{c}$,　$\dot{\omega}_z=-\dot{c}/2$　(6)

等方線形弾性体を仮定し,D_{33}は弾性マトリックス［D］の成分として,時刻tの応力を求めると,

$$\sigma_x=-\sigma_y=D_{33}(1-\cos2\phi) \qquad \tau_{xy}=D_{33}\sin2\phi \qquad (7)$$

上式は,等方線形弾性体の仮定にもかかわらず,例えば,せん断応力は,せん断ひずみの増加に伴い,正弦波状に振動することを示している.この事について次のようなことを理由の１つとして考えることができる.

図１は,単純せん断変形を表すもので,微小要素OABCが時刻tにOAB'C'の状態に至ったことを表している.式(6)の第４式からすれば,時刻tの回転量は,C点のX軸方向変位CC'の1/2に相当する量として

$$\phi=\int_0^t\dot{\omega}_z dt=-\frac{1}{2}\dot{c}t \qquad (8)$$

と求められる.これでは,微小要素は一定角速度で回転を続け,例えば,C点のように,y軸上にあった点はやがて,x軸を越える位置に達することになる.

しかし,図１からすれば,そのような状態にならないことは明らかである.そこで,図１のβ_yすなわち,y軸と線分OP(Pは線分CC'の中点)のなす角に注目すれば,β_yの増分は変形の進行に対して単調に減少し,かつ$0<\beta_y<\pi/2$である.β_yを用いる方が辺OCの回転量を表現するには合理的である.

3.埋め込み座標系を利用した応力の回転補正法

前章に述べた検証は,単純せん断変形に対するものであるので,より一般性を求めるためには,空間固定座標系の基底ベクトル(x,y)と変形する物体に埋め込まれた座標系の基底ベクトル(x^k,y^k) を導入し,各基底ベクトルの変化に注目して回転角を求める方法が良い.具体的な方法を以下に示す.なお,増分方による数値解析法への導入を意識して$\dot{\omega}_z$等の表記から$\Delta\omega_z$等の表記に改める.

【1】埋め込み座標系の基底ベクトル（$\vec{a}_x$,$\vec{a}_y$）を求める.

【2】回転量βは,次式で求める.$\beta=\beta_x-\beta_y$ (9)

埋め込み座標系の各座標の回転βは,x^k軸は$\vec{i}_x$と$(\vec{i}_x+\vec{a}_x)/2$のなす角β_x,Y^k軸は$\vec{i}_y$と$(\vec{i}_y+\vec{a}_y)/2$のなす角β_yとして求める.これより埋め込み座標系のを次式で求める.

【3】回転増分量$\Delta\beta$を求める.これは,当該時間増分の直前の回転量β'との差として次式で求める.

$$\Delta\beta=\beta-\beta' \qquad (10)$$

【4】$\Delta\beta$を式(1)の$\Delta\omega_z$に変わる応力の回転増分量として用いて,応力増分の補正を行う.

4.解析結果

3.で述べた応力の回転補正法により,剛体回転,単純せん断変形解析を行う.解析モデルは図1に示すもので,高さ 1cm,幅 1cm の 1 要素で,積分定数 4 の平面ひずみ要素である.モデルの解析定数は表1に示す.単純せん断変形解析は,降伏条件を課さず,上辺 ab に強制変位を与え,下辺ｃｄは固定とする.強制変位の値は$\Delta u=0.0001$(ｃｍ)とする. 図 2 は,剛体回転に関する結果であり(b)は応力補正法効果を表したものである.2.(a)で述べたように,応力の座標変換がなされており,補正法がこの解析ではうまく機能していることが分かる.

.図 3 は,単純せん断の解析結果である.(a)(b)(c)を比較してみると,明らかに主応力の方向に違いが生じているのが分かる.初期状態において,自由面に,直応力及びせん断応力は作用していない.また,変形後も自由面への作用せん断応力は 0 のままであるので,自由面は主応力面の 1 つとして変形と共に回転したとの考えが成り立つ.これより,自由面直行方向が最小主応力作用方向になっている(c)図が正しいと思われる.また図 3 の結果より応力とひずみの関係を求めると図 4 のようになり,本研究法では,応力とひずみの関係に正弦振動が発生せず単調増加している.これより,Jaumann 応力速度の導入による単純せん断変形解析での応力とひずみの関係に生じる正弦振動を解消できたと思われる

表１ 解析定数

ヤング率	E=100 (kgf/cm^2)
密度	ρ=2.65 (g/cm^3)
ポアソン比	ν=0.3
時間増分	Δt=0.0001 (s)

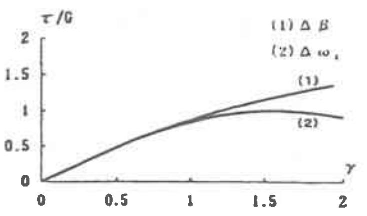
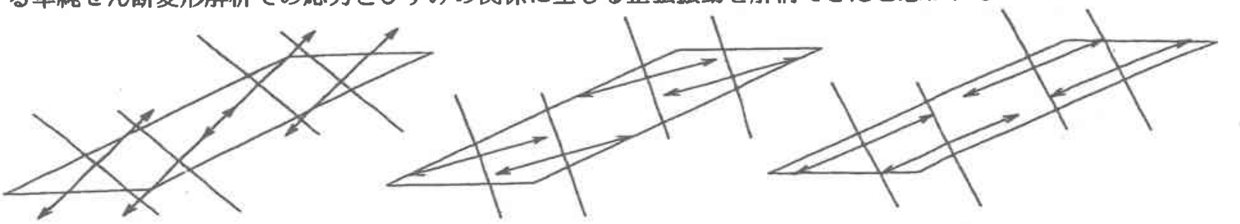


図４ せん断応力ーひずみ曲線



(a)回転角補正なし　(b)$\Delta\omega_Z$による補正　(c)$\Delta\beta$

図３ 単純せん断変形解析(γ=2.0)

5.まとめ

① 連続体スピンを導入した単純せん断解析では,応力とひずみの関係で正弦振動が生じるが,これは,要素の剛体的回転量が正確に求められていないことが原因である事が分かった.

② ①の結果にもとづき,要素と共に回転する埋め込み座標系を用いて,応力の回転量を求める方法を示した.その結果,座標系による応力の回転角補正法では,応力とひずみの関係の正弦振動が解消されたといえる.

参考文献

(1)後藤学:スピンに関する一考察,日本機会学会論文集,第５２巻Ａ編/４７６号,pp1134-1141,1996

(2)渡部修,原田隆:Green 型構成式を用いた平面ブロックの弾性大変形シミュレーション,
日本機会学会論文集,第 57 巻Ａ編/第 540 号,pp1808-1814,1991

(3)黒田充紀：変形する物体の客観応力速度について,構造工学論文集,Vol,37A,pp401-408,1991

(4)木山英郎,藤村尚,西村強:連続体の大変形解析のための流動要素法(FLEM)の提案,土木学会論文集