

有限要素法による開水路流れの数値解析に関する研究

五 洋 建 設 (株) 正会員 〇柴田 浩城
 岡山大学環境理工学部 正会員 前野 詩朗
 岡山大学環境理工学部 正会員 名合 宏之

1.はじめに

堰周辺部などに見られるような常流と射流が混在する流れを数値解析的に再現する場合には、従来より MacCormack 法等の差分法による方法が多く用いられてきている。しかし、これらの方法では、分流を含むような流れや、河道幅が大きく変化するような流れ場には適用し難い。そこで、本研究では複雑な形状を容易に表現することが可能である有限要素法を数値解析法として適用することにした。有限要素法では一般に重み付き残差法の一つであるガラーキン法を用いて基礎式を離散化するが、流れの基礎式に適用すると数値振動が発生することが知られている。そこで、本研究では風上手法を取り入れた SUPG 法を用いて常流と射流が混在した流れを数値解析し実験値と比較することにより、その解析手法の妥当性について検討する。

2.数値解析法の概要

基礎式は二次元浅水方程式を用いた。空間方向については有限要素法により離散化し、時間方向については差分法により離散化する。さらに、数値振動を抑えるために人工粘性項を付加した。

1) 基礎式：二次元浅水方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} U + A_x \frac{\partial}{\partial x} U + A_y \frac{\partial}{\partial y} U + F U = E \quad (1)$$

ここに

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{pmatrix} \quad A_x = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ h_0 + \zeta & 0 & u \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & h_0 + \zeta & v \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ \frac{\partial h_0}{\partial x} & \frac{\partial h_0}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \varepsilon_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし、 u, v ; 流速 ζ ; 水位 h_0 ; 初期水深 n ; マンギの粗度係数 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$; 渦動粘性係数 $R = \frac{gn^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{(h_0 + \zeta)^{5/3}}$

2) 空間の離散化：風上手法を取り入れた SUPG 法により離散化を行う。SUPG 法は、粘性項には形状関数 Φ を重み関数として用い、それ以外の項には形状関数と次式で表される付加項 P を加えた重み関数を用いる。

$$P = \tau L(\Phi) \quad (2)$$

ここで、 L は一階の微分演算子であり、 $L = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y}$ と表される。また、風上係数 τ は、 $\tau = \frac{|\alpha| ds}{2 \|A''\|}$ と表される。

ここに、 $\alpha = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}$ $Pe = \frac{\|A''\| ds}{2\varepsilon}$ $A''_x = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ $A''_y = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ $\|A''\| = \sqrt{A''_x^2 + A''_y^2}$ ds ; メッシュサイズ

3) 時間の離散化：SUPG 法により定式化後、簡単に表すと $M \frac{\partial U}{\partial t} + KU = 0 \quad (3)$

ここに、 M ; 時間微分の変数に関するマトリックス K ; 時間に関しない変数に関するマトリックス
これを時間方向に時間積分することにより次のステップの値を求める。

$$U_{j+1}^{n+1} = [CM]^{-1} \left(\left(M - \frac{1}{2} \Delta t K \right) U^n - [OM] U_j^{n+1} \right) \quad (4)$$

各時刻において $u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} \leq EPS$ により収束判定する。

ただし、 $\left(M + \frac{1}{2} \Delta t K \right) = [CM] + [OM]$ $[CM]$; 対角成分 $[OM]$; 対角以外の成分

4) 人工粘性係数：各時刻において次の人工粘性項を付加する。

$$h_i = h_i + \frac{1}{k_j} \sum_j (r_j \zeta_j - r_i \zeta_i) \quad u h_i = u h_i + \frac{1}{k_j} \sum_j (r_j u h_j - r_i u h_i) \quad v h_i = u h_i + \frac{1}{k_j} \sum_j (r_j v h_j - r_i v h_i) \quad (5)$$

ただし、 $r_i = K \sum_j \left(\frac{L_{\max}}{L_j} \frac{|h_j - h_i|}{h_j + h_i} \right)$ $K = \beta \times Fr$ Fr ；フルード数 $L_{\max}$ ；最大要素面積の平方根

h_i ；節点 i の水深 h_j ；節点 i と関係する節点 j の水深 k_j ；節点 j の数 DL_j ；節点 i と節点 j 間の距離

3. 数値解析結果と実験結果との比較検討

実験は、幅 260cm、長さ 500cm の水路に高さ 10cm、長さ 110cm、幅 30cm、上流下流部傾斜 1：1 の堰を 2 つ設置し、堰を越流する流量（72.2(l/s)）で行った。実験装置の対称性を考慮して右岸側半分を解析領域とし、節点数 668、要素数 1247 のモデルを用いて数値解析を行った。

図 1、図 3 の実験結果であり、図 2、図 4 は解析結果である。解析結果は、流出流量と流入流量の差が 1% 以下の状態が連続 500 回で収束した判断とした。それぞれの結果を比較すると、局部における細かい流況については完全には再現できていないものの、堰を越流の様子や跳水の様子などをある程度再現していることが分かる。

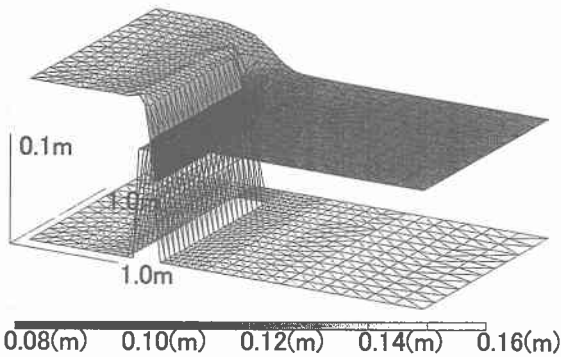


図 1 水面形（解析値）

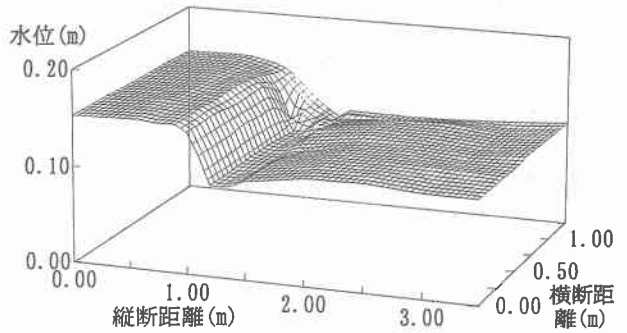


図 2 水面形（実験値）

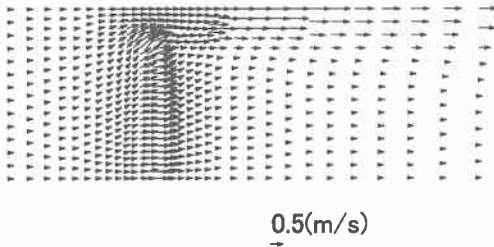


図 3 流速分布（解析値）

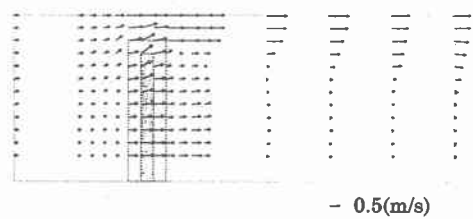


図 4 流速分布（実験値）

4. 結論

本研究により、本解析手法は急な勾配を有する堰を越流し、跳水が存在するような場合にも適用可能であることが明らかになった。しかし、跳水区間で数値振動が見られるなど局所区間の取り扱い方法、境界条件の設定方法、人工粘性の取り扱い方法など、今後さらに検討する必要がある。

参考文献：(1) 日本数値流体力学会・有限要素法研究委員会編；有限要素法による流れのシミュレーション；シュプリンガー・フェアラーク東京 p.99-113 (2) O.C.Zienkiwicz & R.L.Taylor；マトリックス有限要素法Ⅱ；科学技術出版社 p.448-518