非定常スペクトル解析から求めた位相の時間変化に関する一考察

梶谷エンジニア中国支店　正員　○藤原　豪紀
広島工業大学　正員　中山　隆弘

1．まえがき　地震動のフーリエ解析では，これまで軽視されがちであった位相スペクトルのもつ意味が明確化され，その重要性が指摘されている．一方，目を非定常スペクトル解析に転じると，いわゆる非定常な，時間の関数である位相（以下，時間位相という）そのものが十分認知されているとはいい難い段階にある．本研究ではこの時間位相の物理的意味について基礎的な検討を行った．

2．時間位相のフーリエ級数表示　地震動記録を中心円振動数ω_0のバンドパスフィルターで処理して得た帯域波を$X_{\omega 0}(t)$とする．この帯域波が次式のように表されるものとする．

$$X_{\omega 0}(t)=\sum_{k=-l}^{l}A_k\cos\{(\omega_0+\Delta\omega k)t+\theta_k\} \tag{1}$$

ここで，$\Delta\omega$は円振動数間隔であり，A_k，θ_kはそれぞれ$(\omega_0+\Delta\omega k)$円振動数成分の振幅，位相角である．一方，ＣＤ法[1]を用いた非定常スペクトル解析では(1)式は次のように表すことができる．

$$X_{\omega 0}(t)=P(t,\omega_0)\cos\{\omega_0 t+\alpha(t,\omega_0)\} \tag{2}$$

ここで，$P(t,\omega_0)$は帯域波の包絡線であり，$\alpha(t,\omega_0)$は時間位相である．(1)式と(2)式に対してそれぞれＣＤ法を適用すると，包絡線と時間位相をフーリエ級数で表すことができる．まず，(1)式に$\cos\omega_0 t$，$\sin\omega_0 t$をそれぞれ掛け，両波形をローパスフィルター処理Ｆすると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(X_{\omega 0}(t)\cos\omega_0 t)&=\frac{1}{2}\sum_{k=-l}^{l}A_k\cos(\Delta\omega kt+\theta_k)\\ \mathrm{F}(X_{\omega 0}(t)\sin\omega_0 t)&=-\frac{1}{2}\sum_{k=-l}^{l}A_k\sin(\Delta\omega kt+\theta_k)\end{aligned} \tag{3}$$

さらに，(2)式にＣＤ法を適用することによって同様の関係式が得られる．これらの関係式をまとめると包絡線と時間位相は次のように表される．

$$\begin{aligned}P(t,\omega_0)&=\left[\left\{\sum_{k=-l}^{l}A_k\cos(\Delta\omega kt+\theta_k)\right\}^2+\left\{\sum_{k=-l}^{l}A_k\sin(\Delta\omega kt+\theta_k)\right\}^2\right]^{0.5}\\ \alpha(t,\omega_0)&=\arctan\left(\frac{\sum_{k=-l}^{l}A_k\sin(\Delta\omega kt+\theta_k)}{\sum_{k=-l}^{l}A_k\cos(\Delta\omega kt+\theta_k)}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式から，包絡線と時間位相のどちらもフーリエ振幅と位相角の情報を含んでいることがわかる．包絡線は非定常スペクトルと次式の関係にあることから，非定常スペクトル解析とフーリエ解析の関係は，概念的に図１のように表すことができる．

$$P(t,\omega_0)=\sqrt{2f(t,\omega_0)\Delta\omega_f} \tag{5}$$

ここで，$f(t,\omega_0)$は非定常スペクトルであり，$\Delta\omega_f$はバンドパスフィルターの帯域幅である．

３．数値計算　計算には，El Centro NS(1940)の地震動記録（時間間隔0.01秒，記録時間22秒）を用いた．図２に中心周波数 f_o=2.736Hzの帯域波を示す．図３には同周波数の非定常スペクトルと時間位相を示す．なお，計算例は示していないが，図３の非定常スペクトルと時間位相を，(5)式と(2)式を用いて合成することにより，図２の帯域波が完全に再現できることを付け加えておく．図４に帯域波のフーリエスペクトルと，(2)式において $P(t,\omega_o)$=1とし，時間位相だけで再合成した位相波のフーリエスペクトルを示す．位相波のフーリエスペクトルは帯域波のそれとほぼ相似であることから，時間位相が帯域波の周波数成分に関する情報を含んでいることがわかる．特に時間位相が各周波数成分の相対的な大小関係に関する情報をも含んでいることは注目に値する．図５には帯域波の瞬時周波数を示す．時間位相の時間に関する位相変化は，瞬時周波数によって周波数の変化としてとらえることができる．時間位相は非定常スペクトルの谷部に当たる時刻で急変していることがわかる．

４．まとめ　包絡線と時間位相のフーリエ級数式を与えることにより，非定常スペクトル解析とフーリエ解析の関係を示した．さらに時間位相の物理的意味について，周波数および時間領域の両面から若干の考察を加えた．非定常スペクトル解析とフーリエ解析の詳細な関係については追って報告する予定である．

参考文献　1)小松定夫・藤原豪紀・中山隆弘：コンプレックス・ディモデュレーション法による地震動の非定常スペクトル解析，土木学会論文報告集，第368号，1986年4月．

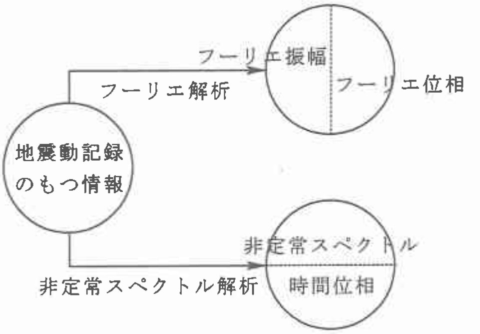

図-1 非定常スペクトル解析とフーリエ解析の関係

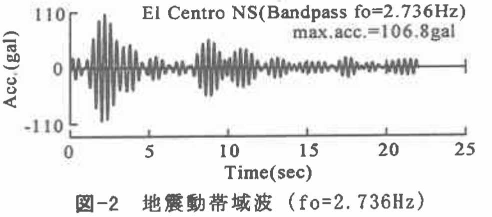

図-2 地震動帯域波（fo=2.736Hz）

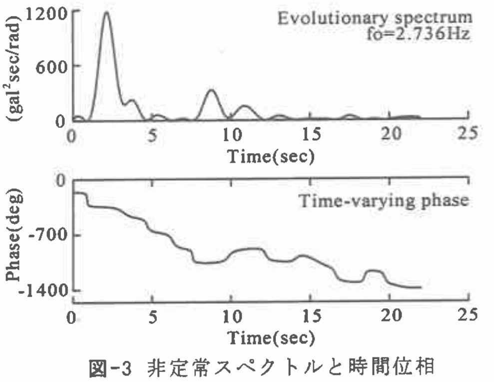

図-3 非定常スペクトルと時間位相

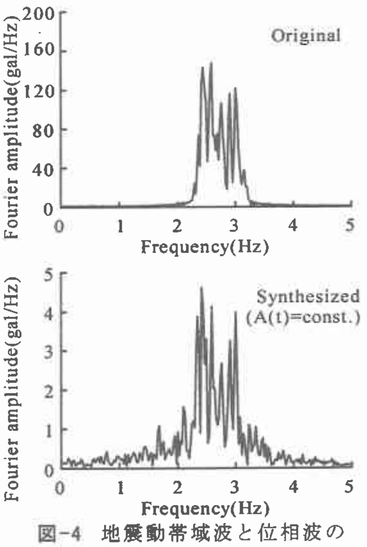

図-4 地震動帯域波と位相波のフーリエスペクトル

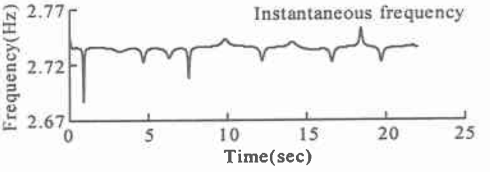

図-5 地震動帯域波の瞬時周波数