

***n*bars-truss における分岐・カオス問題**

広島大学 学生会員 ○海田 辰将

広島大学 正会員 有尾 一郎

広島工業大学 正会員 佐藤 誠

1. 本研究の目的

本研究は、幾何学的非線形性を持つ *n*bars-truss における構造物の安定・不安定問題を考える。静力学的安定・不安定問題ではライズパラメータ γ に対する 2bars-truss モデルの分岐座屈挙動特性について明らかにする。動力学の問題では、幾何学的非線形性に依存する 3 自由度の Duffing 方程式を誘導し、ヤコビアン行列に基づく固有値から系の安定性を調べる。また、位相空間における各運動の軌跡と位相的構造の観察を通して分岐解の存在とそのカオス挙動特性を明らかにする。

2. 静力学的挙動特性

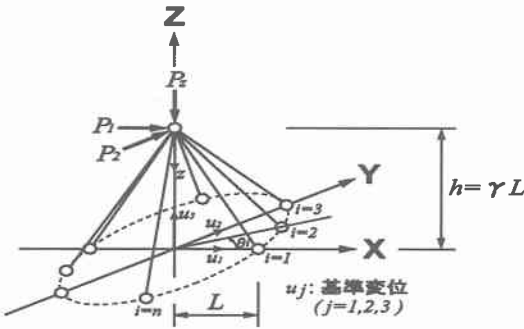


図-1 軸対称 *n*bars-truss モデル

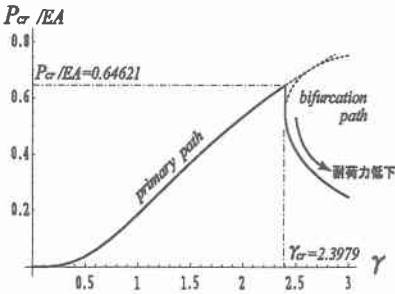


図-2 ライズ比 γ の変化に伴う静的最大耐荷力

図-1に示す *n*bars-truss について、各部材の全ポテンシャルエネルギー Π から系の釣合い条件を考え、 Π

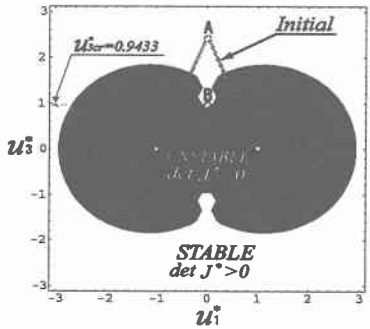


図-3 最大耐荷力発生時における系の安定・不安定領域

の第2変分からなる Jacobian 行列 J の行列式 $\det J$ の正負から系の安定性を判定する。図-2はライズパラメータ γ を変化させたときの 2bars-truss における耐荷力曲線を示す。その結果から、この系の最大耐荷力は $P_{cr}/EA = 0.64621$ であり、そのときのライズ比は $\gamma_{cr} = 2.3979$ と求められ、 $\gamma > \gamma_{cr}$ となる構造物に対して急激に耐荷力を失うことに注意しなければならない。 $\gamma < \gamma_{cr}$ では Snap-through 型の崩壊を、 $\gamma > \gamma_{cr}$ では分岐型の崩壊パターンとなる。図-3は $\gamma = \gamma_{cr}$ の静的安定・不安定領域を示す。この図から主径路 $u_1^* = 0$ 上をたどって A 点から B 点まで変位したとき $u_3^* = 0.9433$ で初めて特異点となり、不安定領域へと移ることが分かる。

3. 動力学の挙動特性

*n*bars-truss モデルを用いた動力学の安定性では、エネルギー原理から得た系の復元力を用いて基準化された非線形 Duffing 方程式

$$\ddot{u}_i^* + \delta \dot{u}_i^* + \left(\frac{n}{2}\right) \kappa \omega_0^2 ((u_i^*)^3 + a_i u_i^*) = P_i, \quad i = 1, \dots, 3 \tag{1}$$

を誘導し、この非線形微分方程式から Runge-Kutta 法より解を求める。ここに P_i は強制振動項として $P_3 = F^* \cos \omega t$ であり、 $\kappa = (1 + \gamma^2)^{-\frac{3}{2}}$ 、 $\omega_0 = k/m$ 、 $a_i = f(u_{j \neq i}^*, \gamma)$ とする。

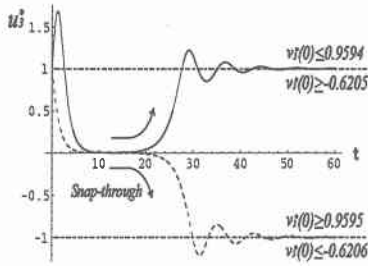


図-4 減衰自由振動の時刻歴変位応答 ($v_3^*(0) \neq 0$)

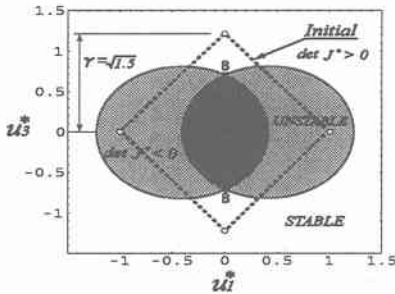


図-5 $\det J^*$ による $\{u_1^*, u_3^*\}^T$ 上の不安定領域 ($u_2^* = 0$)

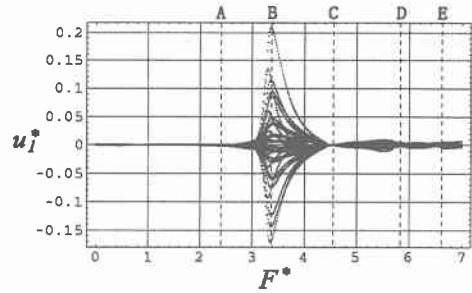
図-4は $u_3^*(0) = 1$ のみ与え、 $\delta = 0.3$ として初速度 $v_3^*(0)$ を変化させたときの u_3^* の時刻歴応答である。図中の破線は $v_3^*(0) < 0$ を示し、この経過では不安定領域を越えて $u_3^* < 0$ となる別の安定な収束点に移る、Snap-through 現象が現れた。

図-5は n bars-truss ($n \geq 3$), $\gamma = \sqrt{\frac{3}{2}}$ の系における $\{u_1^*, u_3^*\}^T$ 上での安定・不安定領域を示し、図中の B 点は分岐点である。薄い灰色部分は Snap-through 型、濃い灰色部分は分岐型の不安定領域となる。

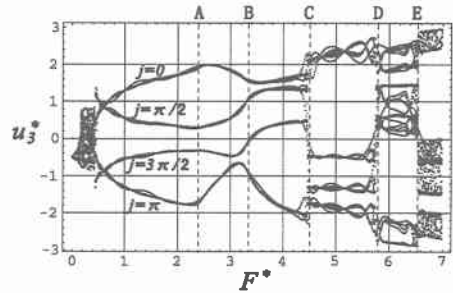
図-6は 3bars-truss について式 (1) の強制振幅パラメータ F^* を変化させたときの u_1, u_2 における励起および定常状態での周期解を示す。初期値は $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}^T = \{0.01, 0.01, 1\}^T$ とし、減衰パラメータ $\delta = 0.3$, $\gamma = 0.5$ に設定した。図-6において $F^* < A$ のとき、解 u_3^* は初めカオス解が生じるが、その後は u_1^*, u_3^* とともに定常になっており、 $u_3^* = 0$ に関してほぼ対称形となる。ところが、 $F^* > A$ になると u_1^* は図-6(b) の A-B 区間で乱れ始め、突然 B で解の爆発が現れた (図-6(a) 参照)。

4. 結論

1) 静力学的問題では、2bars-truss のライズ比 γ を変化させたときの、主経路 $u_1^* = 0$ における系の最大



(a) 3bars モデルの $F^* - u_1^*$ 周期解 ($2n\pi + j$)



(b) 3bars モデルの $F^* - u_3^*$ 周期解 ($2n\pi + j$)

図-6 F^* の変化に対する変位 $\{u_1^*, u_3^*\}^T$ の挙動特性

耐荷力は $P_{cr}/EA = 0.64621$ であり、臨界ライズ比は理論上、 $\gamma_{cr} = \sqrt{5.75}$ であることが分かった。

2) 主経路 $\{0, 0, u_3^*\}^T$ 上で、 γ に依存して複数の特異点が現れるが、ある $\gamma = \gamma_{cr}$ のとき、特異点がただ 1 点に定まる。その値は 2bars では $\gamma_{cr} = \sqrt{3}$, n bars では $\sqrt{\frac{3}{2}}$ となった。

3) 強制 Duffing 振動について

(a) 強制外力を u_3 方向にしか載荷していないにも関わらず、初期条件によって他の方向にも解が現れ、ある F^* のとき、解が爆発し、構造物にとって危険な状態が発生し得る、

(b) あるパラメータ F^* の変化に対し、 u_1 方向の乱れが収まり始めると u_3 方向の各応答がジャンプなどの予測が困難な挙動を起こす。

ことが明らかになった。

参考文献

- [1] J.M.T.Thompson and H.B.Stewart :Nonlinear Dynamics and Chaos Geometrical Methods for Engineers and Scientists ,John Wiley & Sons Ltd ,1986