対称位数の高い構造系に対する超並列 Cholesky 分解

広島大学　正会員　○有尾　一郎

1　はじめに

近年対称性を持つ構造系の剛性行列をブロック対角化する手法 (BDM) が提案され，その数値解析上の利点が示されている [1]．この手法は対称な構造系の剛性行列をその幾何学的特性に基づいた座標変換を用いて剛性方程式を複数の独立な式に分解し，LU 分解の並列化と高速化を図るものである．対称な構造系の剛性行列をブロック対角化し，対角ブロック毎に LU 分解を行うことにより，LU 分解の並列化・高速化と共に計算機で用いる所要配列容量の縮小化を実現する．対称位数の高いネット構造に本手法を適用し，超並列化アルゴリズムの有用性と汎用性を検証する．

2　並列 LU 分解

LU 分解とはある正則な行列 K を下三角行列 L と上三角行列 U との積に分解する方法であるが，特に，この両三角行列が転置行列の関係となる場合には Cholesky 分解と呼ばれる．本概要では，さらに $K = U^{\mathrm{T}}DU$ と分解する修正 Cholesky 分解法を用いることとする．剛性行列 K^{μ} を修正 Cholesky 法により分解すると

$$K^{\mu} = (U^{\mu})^{\mathrm{T}} D^{\mu} U^{\mu}, \quad {}^{\forall}\mu \in R(G) \qquad (1)$$

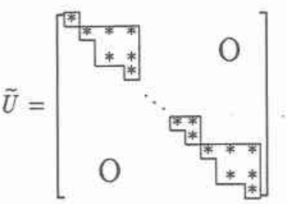
となる．ここに，U^{μ}, D^{μ} は既約表現毎の上三角行列および対角行列である．一方，ブロック対角行列 $\widetilde{K}$ は

$$\begin{aligned} \widetilde{K} &= \widetilde{U}^{\mathrm{T}} \widetilde{D} \widetilde{U} \\ &= \mathrm{diag}[\cdots, K^{\mu}, \cdots] \\ &= \mathrm{diag}[\cdots, (U^{\mu})^{\mathrm{T}} D^{\mu} U^{\mu}, \cdots] \qquad (2) \end{aligned}$$

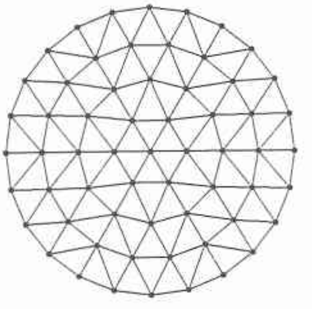
と表される．ここに，

$$\begin{aligned} \widetilde{U} &= \mathrm{diag}[\cdots, U^{\mu}, \cdots] \\ \widetilde{D} &= \mathrm{diag}[\cdots, D^{\mu}, \cdots] \end{aligned}$$

と既約表現 μ に対する分解が可能である．例えば，この $\widetilde{U}$ の具体形を書くと



となる．このように，各ブロックは完全に独立しているので，演算はブロック毎に行え，また，並列計算機による高速計算にも適している．

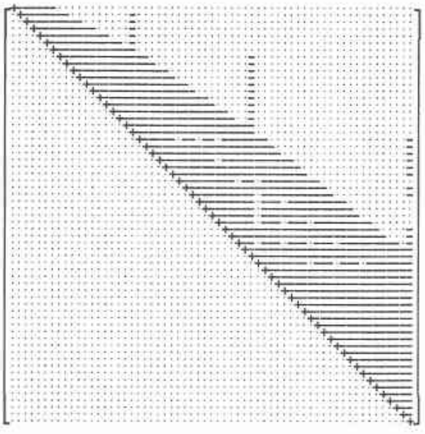


図– 1　軸対称ネット構造 ($n = 6, m = 4$)

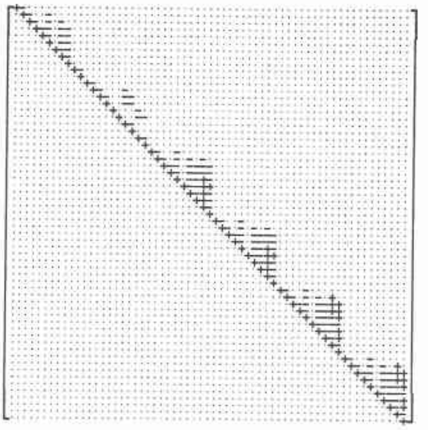
3　軸対称ネット構造

図–1 に示す 1 節点 1 自由度の n 角形 m 層ネット構造を数値計算例として取り上げる．こ

Ichiro ARIO



(a) 直接法による上三角行列 U



(b) ブロック上三角化行列$\widetilde{U}$

図- 2 上三角行列 Uとブロック上三角化行列$\widetilde{U}$

の系全体の剛性行列の行列サイズは

$$N = 1 + n\sum_{i=1}^{m} i = 1 + \frac{m(m+1)}{2}n \tag{3}$$

と表される．ブロックの全個数 $q(D_n)$ は十分大きな n に対し，

$$q(D_n) \simeq n = \frac{2(N-1)}{m(m+1)} \simeq \frac{2}{m(m+1)}N \tag{4}$$

である．一般にバンド幅を考えない修正 Cholesky 法の演算数 ρ は行列サイズ N に対して

$$\rho = \frac{N^3}{6} + \mathcal{O}(N^2) \simeq aN^3 \tag{5}$$

と表される．これに対して本手法による演算量の主要項は

$$\widetilde{\rho} \simeq a\left(\frac{N^3}{[q(D_n)]^2}\right) = \frac{am^2(m+1)^2}{4}N \tag{6}$$

に支配される．したがって，この系に対する本手法と従来の方法との演算効率の比は

$$\frac{\widetilde{\rho}}{\rho} \simeq \frac{a}{[q(D_n)]^2} \propto \frac{1}{n^2} \tag{7}$$

と表される．すなわち，本手法により演算量を $1/n^2$に減少できる．

4 考察と結論

図–2に直接法による上三角行列 Uと本手法によるブロック上三角行列$\widetilde{U}$の結果を示す．BDM を用いることにより，対称構造系の剛性行列の LU分解 (修正 Cholesky 分解) を高速化かつ並列化する手法を示せた．したがって，対称位数 n を増加させることにより，理論上並列化計算を増加させることができる．今後の課題として，本格的な構造解析への適用が望まれる．

参考文献

[1] Ikeda, K., Ario, I. and Torii, K. : Block-diagonali-zation analysis of symmetric plates, *International Journal of Solids and Structures*, 29(22), pp.2779-2793, 1992.