貯水池システムの統合操作ルール設計モデルに関する基礎的研究

明生建設株式会社　正員　○松本　卓也
鳥取大学大学院　学生員　梶谷　徹也
鳥取大学工学部　正員　多々納裕一

1. 研究の目的

貯水池の操作ルールの最適化手法に関してはこれまでに多くの研究が蓄積されてきている。その中でも確率ダイナミックプログラミングは、少数の貯水池を有する流域の貯水池群の統合的操作ルールを検討する上で最も有用な手法のひとつである。しかしながら貯水池数の増加に伴って問題のサイズが指数的に増加する「次元の呪い」のため統合操作ルールの実現は困難であった。

本研究では、各々の貯水池への流入量が空間的には相関を持つが時間的には独立かつ同一な確率分布に従う場合を対象として、多数の貯水池からなる貯水池システムの統合操作ルールを厳密に求めるためのアルゴリズムを提案する事を目的とする。

2. 貯水池群の統合操作ルール設計問題の定式化

本研究では、m 個の貯水池を有するシステムを想定する。議論を簡単化するために、各貯水池直下流に評価地点があり、損失は評価地点における流量に依存して定まるものとする。また、各貯水池は添え字 i によって区別されるものとする。そしてシステム内の貯水池の集合を $\mathcal{I}=\{i|i=1,\cdots,m\}$ で定義する。さらに、貯水池 $i\in\mathcal{I}$ に直接河道で接続する貯水池の集合を $\mathcal{I}^i\subseteq\mathcal{I}$ で定義し、その第 j 要素を $k^i(j)$ で与えよう。すなわち、$\mathcal{I}^i=\{k^i(j)|j=1,\cdots,m^i\}$。

いま、この貯水池システムの状態を貯水池群に貯えられている放流可能量ベクトルを $X_n=(S_n^1+I_n^1,\cdots,S_n^m+I_n^m)$ で与えることとする。ここで、以下で設計の対象とする操作ルールを定義しておこう。操作ルールは、当該期における放流可能量の実現値 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ に対して、貯水池群からの放流量 $R_n=(R_n^1,\cdots,R_n^m)$ を対応づけるベクトル関数 $r(x)$ として定義する。また、河川または残流域からの流入量ベクトル $I_n=(I_n^1,\cdots,I_n^m)$ は空間的には相関を有するが時間的には独立かつ同一な確率分布に従う離散確率変数であるとする。すなわち、

$$\Pr\{I_n=q\}=\theta(q^1,\cdots,q^m).$$

ただし、$q=(q^1,\cdots,q^m)$ である。

流入量ベクトル I_n^i が時間的に独立かつ同一の確率分布に従うという仮定から、各々の貯水池の操作ルール $r(s)$ を所与とすれば状態ベクトル X_n は、マルコフ連鎖を形成することが容易に導ける。いま、第 n 期における放流量ベクトル R_n が $r=(r^1,\cdots,r^m)$ をとる場合、貯水池群の状態が $x=(x^1,\cdots,x^m)$ から 1 期後に $y=(y^1,\cdots,y^m)$ に推移する確率（1ステップ推移確率） $P(y|x,r)$ は次式で与えられる。

$$P(y|x,r)=\begin{cases} 0 \\ \left(\begin{array}{l}\text{ある } i\in\mathcal{I} \text{ に対して} \\ y^i-x^i-\sum_{j=1}^{m^i}r^{k^i(j)}+r^i\le 0, y^i<\bar{x}^i\end{array}\right) \\ \theta(y^1-x^1-\sum_{j=1}^{m^1}r^{k^1(j)}+r^1, \\ \quad \cdots,y^m-x^m-\sum_{j=1}^{m^1}r^{k^1(j)}+r^m) \\ \left(\begin{array}{l}\text{すべての } i\in\mathcal{I} \text{ に対して} \\ y^i-x^i-\sum_{j=1}^{m^i}r^{k^i(j)}+r^i>0, y^i<\bar{x}^i\end{array}\right) \\ \Theta(y,x,r:\mathcal{K}) \\ \text{（その他の場合）}\end{cases}$$

ここで、 $\bar{x}^i=v^i+\bar{i}^i, \mathcal{K}=\{i\in\mathcal{I}|y^i=\bar{x}^i\}$ であり、

$$\Theta(y,x,r:\mathcal{K})=\sum^{(1:\mathcal{K})}\cdots\sum^{(m:\mathcal{K})}\theta(z^1,\cdots,z^m)$$

ただし、

$$\sum^{(i:\mathcal{K})}=\begin{cases}\sum_{z^i=\bar{x}^i-x^i-\sum_{j=1}^{m^i}r^{k^i(j)}+r^i}^{\infty} & (i\in\mathcal{K}) \\ \sum_{z^i=y^i-x^i-\sum_{j=1}^{m^i}r^{k^i(j)}+r^i}^{y^i-x^i-\sum_{j=1}^{m^i}r^{k^i(j)}+r^i} & (i\notin\mathcal{K})\end{cases}$$

このとき、統合操作ルール設計問題はマルコフ決定過程の理論を用いて、平均期待損失最小化問題として以下のように定式化できる。

$$u(x)+g=\min_{r\in\Omega(x)}\sum_{i\in\mathcal{I}}l^i(r^i)+\sum_{x\in X}u(y)P(y|x,r)$$

ただし $u:X\to R$、$g\in R$、$X=\times_{i=1}^m X^i$、 $X^i=\{x^i|x^i=1,\cdots,\bar{x}^i\}$ であり、ここで×は直積を表す。

この問題には政策改良法等が適用可能であるが、貯水池の数 m が大きいと現実にこの問題を解くことは不可能である。この問題の状態ベクトルのとる状態の組み合わせは $\prod_{i=1}^m\bar{x}^i$ である。仮に $\bar{x}^i=a$ を想定してみると 状態ベクトルのとりうる値の組み合わせは a^m となり、可能な状態の組み合わせが貯水池の数の増加とともに指数関数的に増加することがわかる。

いま、この問題の双対問題を求めよう。これは以下の線形計画問題となる。

$$
\begin{aligned}
\text{(LP1)}\quad & \min_{h(x,r)} \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)}\sum_{i=1}^{m} l^i(r^i)h(x,r)\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} P(y|x,r)h(x,r) = \sum_{r\in\Omega(z)} h(y,r)\\
& \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} h(x,r) = 1\\
& h(x,r)\geq 0
\end{aligned}
$$

ここで $P(\cdot)$ は放流量ベクトルを所与としたときの状態の推移確率、$h(\cdot)$ は状態 x と放流量ベクトル r の同時生起確率である。

$h^*(x,r)$ を上の線形計画問題の解とすると、最適操作ルールは混合戦略として与えられることになる。すなわち、放流可能量ベクトルが実現値 x をとった場合に放流量ベクトル r を選択する確率 $\psi(r|x)$ は次式で与えられる。

$\psi(r|x) = h^*(x,r)/\sum_{r\in\Omega(x)} h^*(x,r).$

ここで、線形計画問題の解は、制約式によって与えられる凸多面体の端点の中に存在することに注意しよう。上の線形計画問題の端点解は、次のような特殊な構造をもつ。すなわち、

$\psi(r(x)|x) = 1 \qquad (\forall x\in X).$

このことは、混合戦略として求められた最適操作ルールから純粋戦略型の操作ルールが導出されることを示している。さて、この式 (LP1) は、貯水池数の増加に伴って指数的に大きくなる「次元の呪い」のために、現実に解くことは不可能となる。

そこで、本研究ではこの式 (LP1) に「制約式集計化法」を適用し、逐次的な計算を行うことで、この問題の厳密解を求める。

3. 制約式集計化法の導入

制約式集計化法は Ermoliev,Kryazhimskii,Ruszczynski (1995) により、大規模な制約を有する凸計画問題を解くために開発された手法である[1)]。

この方法は、各々の制約式に重みをかけて集計化した制約を有する子問題を解き、集計化の重みと各子問題の解の重みを系統的に調整しながら、子問題の解の系列の線形結合を逐次的に算定することによって原問題の解を求めるアルゴリズムである。

統合的貯水池操作ルール設計問題は、多くの場合、極めて大規模な線形計画問題になるが、制約式集計化法を用いて逐次的に原問題の解に収束する比較的小規模な問題の系列を生成することができる。

《定理》Ermoliev, Kryazhimskii and Ruszczynski
以下の凸計画問題（原問題）について考える。

$$
\begin{aligned}
& \min_{x\in X} f(x)\\
\text{s.t.}\quad & Mx = d,
\end{aligned}
$$

ここで $x\in R^n$、$f: R^n \to R$は微分可能凸関数、Mは $m\times n$ 行列、$d\in R^m$と Xの組はコンパクトである。また $\{\tau_k\}$ を$\tau_k\in[0,1]$、$\lim_{k\to\infty}\tau_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty}\tau_k = \infty$、$x^0\in X$を満たすとすると、

$x^{k+1} = (1-\tau_k)x^k + \tau_k u^k$

によって生成される点列 $\{x^0, x^1, \cdots\}$ は原問題の解に収束する。ただし u_kは以下の問題の解である。

$$
\begin{aligned}
& u^k = \min_{u\in X} f(u)\\
\text{s.t.}\quad & \langle Mx^k - d, Mu - d\rangle \leq 0.
\end{aligned}
$$

この手法を式 (LP1) に適用すると以下の計算手順を得ることができる。

1. 実数$\tau_k\geq 0$（$\lim_{k\to\infty}\tau_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k = \infty.$）を設定する。

2. 最初の解 $z_0(x,r)$ を置き、以下の繰り返し計算を行う。

$$z_{k+1}(x,r) = (1-\tau_k)z_k(x,r) + \tau_k h_k(x,r)$$

ここで $h_k(x,r)$ は以下の問題の解である.

$$
\begin{aligned}
\text{(MP1)}\quad & \min \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)}\sum_{i=1}^{m} l^i(r^i)h(x,r)\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} h(x,r) = 1\\
& h(x,r)\geq 0\\
& \sum_{y\in X}\sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} w_k(y)P(y|x,r)h(x,r)\\
& \leq \sum_{r\in\Omega(x)} w_k(y)h(y,r),\\
& h(x,r)\geq 0
\end{aligned}
$$

$$w_k(y) = \sum_{x\in X}\sum_{r\in\Omega(x)} P(y|x,r)z_k(x,r) - \sum_{r\in\Omega(y)} z_k(y,r)$$

このように大規模な線形計画問題に対し、制約式集計化法を適用することで、問題の制約式を逐次的な計算により集計化し、その解を求めることが可能となった。

なお計算事例に関しては紙幅の都合により省略する。

参考文献

1) Yuri M. E. , Arkadii V. K. , Andrzej R. : Constraint Aggregation Principle in Convex Optimization, WP-95-015, IIASA, February 1995.