都市の夜間人口と従業人口の空間的同時分布モデル

東洋建設（株）　正会員　○北出　圭介
岡山大学　　　　正会員　　明神　証

１、はじめに

本研究では、これまで行った研究成果である実際の現象を一般的に表すため、モデルを作成し、遷移確率を用いる手法及びエントロピー法の２つを用いて計算し比較検討することを目的とする。

２、人口分布のモデル化

人口分布のモデル化は、次のように行う。

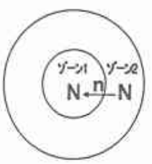
① 都市を中心からの距離によって､ゾーン１とゾーン２の２つに分ける。

② 人口は夜間人口と従業人口の２種類を用いる。

③ 都市の夜間人口と従業人口はそれぞれ一定であるとする。

④ ゾーンの面積はすべて等しいと考える。

都市の人口分布を次のように表す。



n^j: ゾーン j の夜間人口

w^j: ゾーン j の従業人口　$(j=1,2)$

また都市全体の人口 $2N$ は一定であるので、夜間人口を例にとって、

$n^1=N+n$ ：ゾーン１の夜間人口

$n^2=N-n$ ：ゾーン２の夜間人口

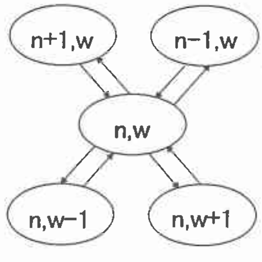
となり、夜間人口のある人口配置状態は変数 n だけで表すことができる。従業人口も同様にして、都市の人口配置状態は (n,w) と表すことができる。

３、遷移確率を用いる手法

まず、マスター方程式の基本的な考え方は次の通りである。時刻 t において状態 (n,w) が生起する確率 $P(n,w;t)$ は、隣接する他の状態からの遷移により増加し、状態 (n,w) から離れる遷移により減少する。ここでは定常確率 $P(n,w)$ を求める。その一般的な関係は、境界条件を考慮すれば、

$$\begin{aligned} s_N^{21}(n,w)P(n,w) &= s_N^{12}(n+1,w)P(n+1,w) \\ s_W^{21}(n,w)P(n,w) &= s_W^{12}(n+1,w)P(n+1,w) \end{aligned} \quad \cdots(1)$$

となる。ここで、例えば $s_N^{12}(n+1,w)$ は状態 $(n+1,w)$ が (n,w) に遷移する確率を表しており、これは状態 $(n+1,w)$ のときゾーン１からゾーン２へ人口が移動する確率と等価である。すなわちこれを１単位当たりの遷移確率 $p_N^{12}(n+1,w)$ を用いて表すと $(N+n+1)p_N^{12}(n+1,w)$ となる。この遷移確率を以下のように仮定する。



$$\begin{aligned} p_N^{12}(n,w) &= \gamma\exp\left[\delta_N+\alpha_N n+\beta_N w\right] \\ p_N^{21}(n,w) &= \gamma\exp\left[-\left(\delta_N+\alpha_N n+\beta_N w\right)\right] \end{aligned} \quad \cdots(2)$$

(1)と(2)から次の $P(n,w)$ が得られる。[1)]

$$P(n,w)=P(0,0)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(N-i)p_N^{21}(i,0)}{(N+i+1)p_N^{12}(i+1,0)}\prod_{j=0}^{w-1}\frac{(W-j)p_W^{21}(n,j)}{(W+j+1)p_W^{12}(n,j+1)} \quad \cdots(3)$$

４、エントロピーを用いる手法

次にもう１つの手法である、エントロピー法について考察する。

$$L=-\sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-W}^{W}P(i,j)\ln P(i,j) \quad \cdots(4)$$

$P(i,j)$: 人口配置状態 (i,j) での状態確率

この手法では上式が最大値をとるときの状態確率分布が解となるが、この最大化とは、不確かさが最大となる分布を求めることである。そして不確かさが最大であるということは、とりうる分布の中でその分布が最も起こりやすいものであることを意味する。今回、エントロピーを最大化するに当たって以下のような制約条件式を定める。

$$\sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-W}^{W}P(i,j)=1 \quad \cdots(5)$$

$$\sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-W}^{W}P(i,j)f(i,j)=M \quad \cdots(6)$$

式(5)は全ての人口配置における状態確率の合計が１であることを表している。また式(6)はある状態確率 (n,w) に関数 $f(n,w)$ をかけたものの合計が一定値 M になることを表している。状態間の遷移を考えずに解を求めるこのエントロピー法では式(5)の決

定が重要な意味を持つことになる。以上の制約条件式を用い、ラグランジェ未定乗数法により式（3）を最大化する。その結果一般解は次式となる。

$$P(n,w)=\frac{\exp[-\mu f(n,w)]}{\sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-W}^{W}\exp[-\mu f(i,j)]} \qquad \cdots(7)$$

5、計算結果

式(3)と(7)において、パラメータ及び制約条件式を具体的に決定し、２つの手法を比較検討する。

遷移確率を用いる方法（パラメータの値の決定）	
図１	$\alpha_N=\beta_N=\alpha_W=\beta_W=0.01, \delta_N=\delta_W=0.0$
図２	$\alpha_N=\beta_W=0.1, \alpha_W=\beta_N=-0.1, \delta_N=\delta_W=0.0$
エントロピー法　$f(i,j), M$ の決定 $M_{av}=\sum_{i=-N}^{N}\sum_{j=-W}^{W}f(i,j)\Big/(2N+1)(2W+1)$	
図３	$f(n,w)=\frac{1}{100}\{(n-8)^2+(w-8)^2\}\{(n+8)^2+(w+8)^2\}$ $M_{av}<M$
図４	〃　$M_{av}>M$

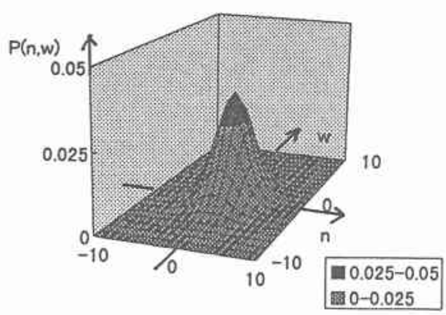


図１　最大値(0,0)

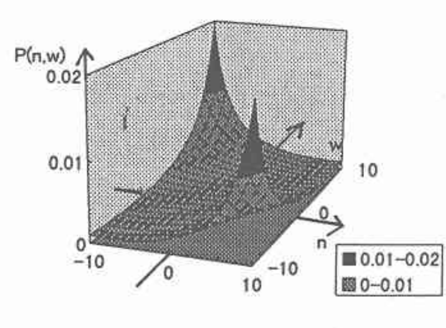


図３　最大値(-10,10),(10,-10)

6、まとめ

以上、都市の夜間人口と従業人口の同時空間分布を確率で表現するため、２つの手法で分析及び検討を行った。その結果、都市の夜間人口と従業人口の空間的同時分布パターンはパラメータ及び制約条件式の決定によりある程度表現できそうである。しかし、より詳細に分布状況を表現するためには、より細分化されたゾーンが必要である。その計算手法についてはエントロピー法が適切であると推測できるが、この点については今後の検討課題である。

【参考文献】

1) W.Weidlich G.Haag　『社会学の数学モデル』
東海大学出版会

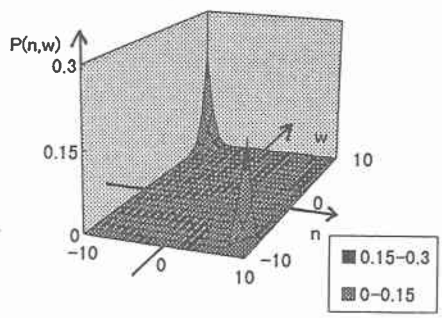


図２　最大値(10,-10),(-10,10)

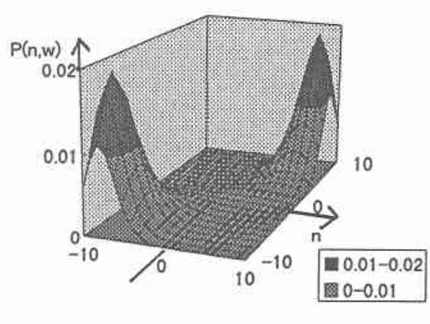


図４　最大値(8,8),(-8,-8)