有限要素･動的線形計画法による3次元温熱制御解析

広島工業大学　正会員　二神　種弘
広島工業大学　学生会員　○難波　史憲
八千代エンジニヤリング株式会社　正会員　半田　博士

１．　はじめに

本研究は，３次元非定常温熱制御のための有限要素･動的線形計画法を用いた数値解析に関する研究である。有限要素･動的線形計画法は，偏微分方程式の有力な数値解析法である有限要素法と線形計画法を併用して開発された分布定数系の最適制御手法である。

線形計画法の一般的解法として，２段階シンプレックス法が用いてられるが，この方法は，（１）第Ｉ段階（初期基底可能解を求める計算），（２）第Ⅱ段階（第Ｉ段階で求めた初期基底可能解をもとに最適解を求める計算）からなり，人工変数の導入による膨大な計算機容量と計算時間が必要となる。しかし，本研究では，温熱制御解析問題における特徴に着目し，初期基底可能解を容易に見つけることができる効率的計算法を工夫した。本効率的計算法は，コンピューターによる第Ｉ段階の計算を不要とし，また第Ⅱ段階の計算機容量も大幅に縮小して計算できるものである。

２．　３次元非定常熱拡散最適制御

２．１　基礎偏微分方程式系

次のような基礎偏微分方程式系で表された非定常３次元熱拡散現象の最適制御を考える。目的関数は，環境容量を求める観点から，制御可能負荷の総和とし，これの最大化を考えることにする。

１）目的関数

$$Z = Opt.\, f(\{\phi\},\{\theta\}) \approx Max. \sum \theta \quad (\text{throughout } \Omega) \qquad (1)$$

subject to :

２）状態方程式

（１）熱拡散方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$- u\frac{\partial \phi}{\partial x} - v\frac{\partial \phi}{\partial y} - w\frac{\partial \phi}{\partial z} - k\phi + Q + \theta \quad (\text{in } \Omega) \qquad (2)$$

（２）初期条件

$$\phi = \Phi^0 \qquad (\text{at } t=0) \qquad (3)$$

（３）境界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (on\ \Gamma_1) \quad (4) \quad , \quad \phi = \Phi_b \quad (on\ \Gamma_2) \quad (5)$$

$$q = \alpha_c(\phi - \Phi_c) \quad (on\ \Gamma_3) \qquad (6)$$

３）制約条件

$$\phi \le \overline{\Phi} \quad (7) \quad , \quad \theta \le \overline{\Theta} \quad (8)$$

４）変数非負の条件

$$\phi \ge 0 \quad (9) \quad , \quad \theta \ge 0 \quad (10)$$

ここで、ϕ:状態変数（温度），θ:決定変数（制御変数，制御可能負荷量），Q:制御不可能負荷量，k:減衰係数，Φ^0:初期温度，D_x, D_y, D_z:x, y, z方向の拡散係数，u, v, w:x, y, z方向の流速，Φ_b:境界での既知温度，α_c:熱伝達係数，Φ_c:外部温度，$\overline{\Phi}$: 状態変数上限値（最高温度の規制値），$\overline{\Theta}$:決定変数上限値（制御可能負荷量の上限値），Ω:全解析領域，$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 :+ \Gamma_3$境界，$x, y, z$:座標，$t$:時間

２．２　３次元有限要素･動的線形計画法の定式化

基礎偏微分方程式系を離散化するために，ガラーキンの重みつき残差法を適用すると，有限要素・動的線形計画法の定式化が次のように得られる。なお，時間微分の離散化はクランク･ニコルソン法を用いて行った。

１）目的関数

$$Z = Opt. \sum_{\tau=1}^{T}\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^\tau \phi_n^\tau + \sum_{i=1}^{I} \beta_i^\tau \theta_i^\tau\right) \approx Max. \sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{I} \Delta t\, \theta_i^\tau \qquad (11)$$

subject to :

２）状態方程式

$$[C]\{\phi_n^{\tau-1}\} + [A]\{\phi_n^\tau\} + [D]\{\theta_i^\tau\} = \{Q_n^\tau\} \qquad (\tau = 1\sim T)\ (12)$$

３）制約条件

$$[g^\phi]\{\phi_n^\tau\} + \{\mu_l^\tau\} = \{\overline{\Phi}_l^\tau\} \qquad (\tau = 1\sim T)\ (13)$$

$$[g^\theta]\{\theta_i^\tau\} + \{v_i^\tau\} = \{\overline{\Theta}_i^\tau\} \qquad (\tau = 1\sim T)\ (14)$$

４）変数非負の条件

$$\{\phi_n^\tau\} \ge 0 \qquad (\tau = 1\sim T)\ (15)$$

$$\{\theta_i^\tau\} \ge 0 \qquad (\tau = 1\sim T)\ (16)$$

ここで，n:節点番号，τ：時間ステップ番号，i：制御変数番号，l：温度規制番号

式(13)，(14)における$\{\mu_i^\tau\}$および$\{\nu_i^\tau\}$は，不等式を等式に直すためのスラック変数である。

2．3　効率的計算法

本研究では，計算機容量と計算時間を大幅に節約するために効率的計算法を工夫した。この計算法は，2段階シンプレックス法の第Ⅰ段階で初期基底可能解を見つけ出す作業を不要とし，以下の方法で，人工変数を導入せずに最適解を求めることができる。

式(12)の状態方程式の両辺に$[A]$の逆行列$[A]^{-1}$を掛けると次式が得られる。

$$\{\phi_n^\tau\}+\sum_{h=1}^{\tau}\left[{}^*D_h^\tau\right]\{\theta_i^h\}=\{B_n^\tau\} \qquad (\tau=1\sim T)\ (17)$$

ここで

$$\left[{}^*D_h^\tau\right]=[A]^{-1}\left[D_h^\tau\right] \qquad (\tau=1\sim T,\ h=1\sim\tau)\ (18)$$

$$\left[D_h^\tau\right]=[C]\left[{}^*D_h^{\tau-1}\right] \qquad (\tau=1\sim T,\ h=1\sim\tau-1)\ (19)$$

$$\left[D_\tau^\tau\right]=[D] \qquad (\tau=1\sim T)\ (20)$$

$$\{b_n^\tau\}=\{Q_n^\tau\}+[C]\{B_n^{\tau-1}\} \qquad (\tau=1\sim T)\ (21)$$

$$\{B_n^\tau\}=[A]^{-1}\{b_n^\tau\} \quad (\tau=1\sim T),\ \{B_n^0\}=\{\Phi_n^0\} \qquad (22)$$

式(17)を式(13)の制約条件に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{h=1}^{\tau}\left[E_h^\tau\right]\{\theta_i^h\}+\{\mu_i^\tau\}=\{{}^\phi B_i^\tau\} \qquad (\tau=1\sim T)\ (23)$$

ここで

$$\left[E_h^\tau\right]=-\left[g^\phi\right]\left[{}^*D_h^\tau\right] \qquad (24)$$

$$\{{}^\phi B_i^\tau\}=\{\overline{\Phi}_i^\tau\}-\left[g^\phi\right]\{B_n^\tau\} \qquad (25)$$

したがって，式(11)～(16)は以下のようになる。

1）目的関数

$$Z=Opt.\sum_{\tau=1}^{T}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^\tau\phi_n^\tau+\sum_{i=1}^{I}\beta_i^\tau\theta_i^\tau\right) \approx Max.\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\Delta t\,\theta_i^\tau \qquad (26)$$

subject to:

2）状態方程式

$$\{\phi_n^\tau\}+\sum_{h=1}^{\tau}\left[{}^*D_h^\tau\right]\{\theta_i^h\}=\{B_n^\tau\} \qquad (\tau=1\sim T)\ (27)$$

3）制約条件

$$\sum_{h=1}^{\tau}\left[E_h^\tau\right]\{\theta_i^h\}+\{\mu_i^\tau\}=\{{}^\phi B_i^\tau\} \qquad (\tau=1\sim T)\ (28)$$

$$\left[g^\theta\right]\{\theta_i^\tau\}+\{\nu_i^\tau\}=\{\overline{\Theta}_i^\tau\} \qquad (\tau=1\sim T)\ (29)$$

4）変数非負の条件

$$\{\phi_n^\tau\}\geq 0\ ,\ \{\theta_i^\tau\}\geq 0\ ,\ \{\mu_i^\tau\}\geq 0\ ,\ \{\nu_i^\tau\}\geq 0 \qquad (\tau=1\sim T)\ (30)$$

制御可能負荷量$\{\theta_i^\tau\}$を，ひとまず，{0}として非基底変数に選び、スラック変数$\{\mu_i^\tau\}$，$\{\nu_i^\tau\}$，および状態変数$\{\phi_n^\tau\}$を基底変数とすると

$$\{\phi_n^\tau\}=\{B_n^\tau\},\ \{\theta_i^\tau\}=\{0\},\ \{\mu_i^\tau\}=\{{}^\phi B_i^\tau\},$$
$$\{\nu_i^\tau\}=\{\overline{\Theta}_i^\tau\} \qquad (\tau=1\sim T,\ n=1\sim N,\ i=1\sim I,\ l=1\sim L)\ (31)$$

となり，これが，有限要素・動的線形計画法の効率的計算法における初期基底可能解となる。この初期基底可能解において，全ての決定変数（制御可能負荷量$\{\theta_i^\tau\}$）は{0}に等しいとおいているので，状態変数（温度$\{\phi_n^\tau\}$）の初期基底可能解$\{B_n^\tau\}$は、制御不可能負荷量$\{Q_n^\tau\}$のみにより生じた温度ベクトルである。

状態変数は常に正なので基底変数のままであり，したがって，最適解を求める計算は，$\{\theta_i^\tau\}$，$\{\mu_i^\tau\}$，および$\{\nu_i^\tau\}$の間で入れ替える計算だけを行えばよいことになり，計算容量と，計算時間を大幅に縮小することができる（表1参照）。

表1　効率的計算法の初期シンプレックスタブロー

C	基底変数	基底可能解	目的関数係数C		
			1 ―― 1	0 ―― 0	0 ―― 0
			$\{\theta_i^1\}$ ―― $\{\theta_i^T\}$	$\{\mu_i^1\}$ ―― $\{\mu_i^T\}$	$\{\nu_i^1\}$ ―― $\{\nu_i^T\}$
0 ⋮ 0	$\{\mu_i^1\}$ ⋮ $\{\mu_i^T\}$	$\{{}^\phi B_i^1\}$ ⋮ $\{{}^\phi B_i^T\}$	E_1^1 E_1^2　E_2^2 ⋮ E_1^T …… E_T^T	I ＼ I	
0 ⋮ 0	$\{\nu_i^1\}$ ⋮ $\{\nu_i^T\}$	$\{\overline{\Theta}_i^1\}$ ⋮ $\{\overline{\Theta}_i^T\}$	g^θ ＼ g^θ		I ＼ I

3．　結語

本研究において工夫された有限要素•動的線形計画法の効率的計算法は，線形計画法の一般的な解法である2段階シンプレックス法と比べ，人工変数を導入しないため，大幅に変数の数を減少させ，計算機容量と計算量（時間）を大幅に縮小することができる。また，計算量を大幅に縮小できるため，計算誤差の集積がおこらず，計算精度が良くなり，安定して解が得られる。したがって，本効率的計算法は，特に3次元問題のような大規模問題解析のための有効な手法となる。