# Green関数を用いたSH板波の散乱解析

岡山大学環境理工学部　　正員　○廣瀬壮一
大日本コンサルタント(株)　　片岡秀起

## 1.　はじめに

薄板の非破壊検査法として、超音波板波探傷法があるが、板波の伝播・散乱に関しては未知な部分も多く、超音波探傷が最適な条件下で適用されているとは言い難い。そこで本研究は、超音波探傷の定量化のための基礎理論の開発を目的として、Green関数を用いた境界要素法によるSH板波の２次元波動解析を行った。

## 2.　境界積分方程式

図1に示すように、無限に続く弾性板内のき裂$S$に時間調和なSH板波が入射したときの散乱問題を考える。き裂表面上の応力がゼロであるとすると、次式を得る。

$$-t^{in}(\boldsymbol{x}) = \int_S n_i(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[u(\boldsymbol{y})] dS_y \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに、$t^{in}$は入射SH板波の表面力、$n_i, n_j$は法線ベクトル、$G^p$はGreen関数、$[u(\boldsymbol{y})]$はき裂開口変位である。Green関数$G^p$は板上下面での境界条件を満足するので、式(1)は板上下面の積分を含まない、き裂面のみの積分から成っている。ただし、その積分核は超特異性を持っているので、変分法によって正則化を行うことにする。

式(1)の両辺に形状関数$\psi^m(\boldsymbol{x})$をかけて$x$について積分し、ストークスの定理を用いると次のように表される。

$$-\int_S \psi^m(\boldsymbol{x}) t^{in}(\boldsymbol{x}) dS_x = -\int_S \int_S G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \varepsilon_{hpq} n_p(\boldsymbol{x}) \varepsilon_{hij} n_i(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \psi^m(\boldsymbol{x})}{\partial x_q} \frac{\partial [u(\boldsymbol{y})]}{\partial y_j} dS_x dS_y$$
$$+ \int_S \int_S \rho\omega^2 G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_i(\boldsymbol{x}) n_i(\boldsymbol{y}) \psi^m(\boldsymbol{x}) [u(\boldsymbol{y})] dS_x dS_y \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに、$\rho$は密度、$\omega$は角周波数、$\varepsilon_{hpq}$は２次元置換記号で$\varepsilon_{hpq}\varepsilon_{hij} = \delta_{pi}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{qi}$の性質を持つ。

き裂開口変位$[u(\boldsymbol{y})]$を形状関数$\psi^n(\boldsymbol{y})$を用いて$[u(\boldsymbol{y})] = \sum \psi^n(\boldsymbol{y})[u^n]$と表し、積分方程式(2)を離散化すると、$[u^n]$を未知数とする連立一次方程式が得られ、散乱問題を解くことができる。

## 3.　Green関数

Green関数$G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$は、無限弾性体に対する基本解$U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$とそれ以外の正則部$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$の和として$G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$と表される。

$U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$はそれぞれ次のように積分表現できる。

$$U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_T r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} e^{ik(x_1-y_1) - R|x_2-y_2|} dk \quad \cdots\cdots (3)$$

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha^+ e^{-R(x_2-y_2)} + \alpha^- e^{R(x_2-y_2)} \right\} e^{ik(x_1-y_1)} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここに、$k_T$は横波の波数、$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$、$R = \sqrt{k^2 - k_T^2}$　$(Re(R) > 0)$であり、$\alpha^{\pm}$は板の上下面の境界条件$\partial G^p / \partial x_2|_{x_2=\pm h} = 0$によって決定される係数で、次のように求められる。

$$\alpha^+ + \alpha^- = \frac{e^{-Rh}}{4\pi R(e^{Rh} - e^{-Rh})} (e^{Ry_2 - iky_1} + e^{-Ry_2 - iky_1}) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\alpha^+ - \alpha^- = \frac{-e^{-Rh}}{4\pi R(e^{Rh} + e^{-Rh})} (e^{Ry_2 - iky_1} - e^{-Ry_2 - iky_1}) \quad \cdots\cdots (6)$$

これらを式(4)に代入すると$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$は

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{-2Rh}}{R(1-e^{-2Rh})}(e^{Rx_2}+e^{-Rx_2})(e^{Ry_2}+e^{-Ry_2}) + \frac{e^{-2Rh}}{R(1+e^{-2Rh})}(e^{Rx_2}-e^{-Rx_2})(e^{Ry_2}-e^{-Ry_2})\right\}e^{ik(x_1-y_1)}dk \quad \cdots\cdots (7)$$

と表される。

$G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を式(2)に代入して計算する際には，例えば以下のような積分を実行する必要がある。

$$\int_{S_n}\int_{S_m} G^p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_x dS_y = \int_{S_n}\int_{S_m} U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dS_x dS_y + \int_{S_n}\int_{S_m}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^{\pm}(k)e^{\mp R(x_2-y_2)}e^{ik(x_1-y_1)}dk dS_x dS_y \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに、$S_n, S_m$はき裂$S$を小分割した境界要素を表す。右辺第一項は無限弾性体における波動解析に現れる特異項であるから、ハンケル関数 $H_0^{(1)}$で表された$U$を使って積分を実行した。一方、右辺第二項は、変数$k$に関する積分と境界$S_n, S_m$に関する線積分の順序を入れ換えて実行した。もし、$S_n, S_m$が直線要素であれば、その積分は容易に解析的に評価でき、残った波数$k$についての積分のみ数値積分を用いて評価すればよい。

## 4. 数値結果

解析モデルは図1に示すような厚さ$2h$の欠陥を含んだ弾性板である。欠陥は板上下面に平行な長さ$2h$のき裂とし、き裂上を200分割した。また、入射波は反対称0次モード、無次元化波長は5.0805445である。このときのき裂開口変位の絶対値、実数部、虚数部の分布をそれぞれ図2,3,4に示す。分割数を300,400と増やしてもほとんど同じ解が得られた。

## 5. おわりに

板上下面での境界条件を満たしたGreen関数を用いた境界積分方程式を求め、き裂上の開口変位を計算することができた。今後、開口変位を散乱波の積分表現に代入して任意の点の散乱波の計算も行い、周波数や入射モードを変化させてデータを蓄積することにより、板波探傷法の定量化に寄与するものと考えられる。

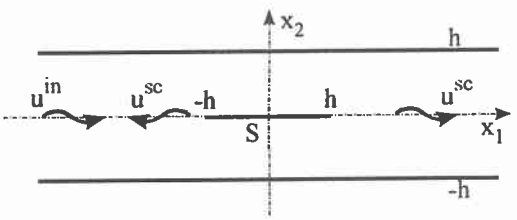


図 1 解析モデル

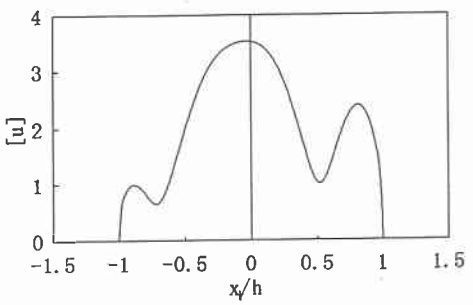


図 2 き裂開口変位の分布(絶対値)

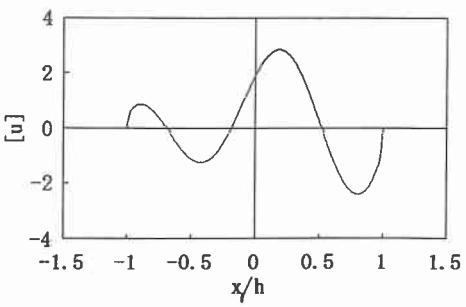


図 3 き裂開口変位の分布(実数部)

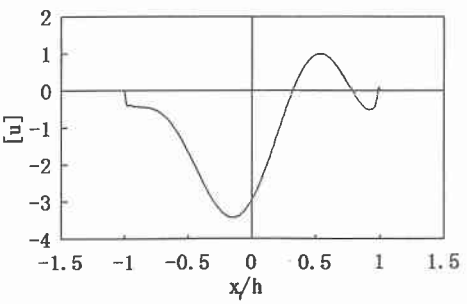


図 4 き裂開口変位の分布(虚数部)