有限要素・動的線形計画法によるポテンシャル制御

広島工業大学　正会員　　二神　種弘
広島工業大学　学生会員　○半田　博士

1．はじめに

有限要素法と動的線形計画法を併用した「有限要素・動的線形計画法（ＦＥ＆ＤＬＰ法）」が、等号あるいは不等号の制約条件式と目的関数を有する非定常偏微分方程式系を解くために開発され、さまざまな制御問題や最適計画問題等の解析のために活用されている。

本研究では、有限要素・動的線形計画法のポテンシャル最適制御の問題（地下水の流れ，拡散，熱伝導，電磁気ポテンシャルなど）への応用として、地下水を水資源利用する場合の揚水量の最適制御を考え、その効率的計算法の開発を行った。

2．有限要素・動的線形計画法による非定常地下水の最適制御

2．1　基礎偏微分方程式系

1）目的関数　$Z = Opt.f\left(\{\phi\},\{\theta\}\right)$　（throughout Ω）　(1)

subject to:

2）状態方程式

（1）浸透流の基礎方程式　$S\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = T\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + T\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \theta - Q$　$(in\ \ \Omega)$　(2)

（2）初期条件　$\phi = \Phi^0$　（at t=0）　(3)

（3）境界条件　$\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0$　$(on\ \Gamma_1)$　(4),　$\phi = \Phi_b$　$(on\ \Gamma_2)$　(5)

3）制約条件　$\phi \geq \underline{\Phi}$　(6),　$\theta \leq \overline{\Theta}$　(7)

4）変数非負の条件　$\phi \geq 0$　(8),　$\theta \geq 0$　(9)

ここで，ϕ＝状態変数（基準線からの地下水頭），θ＝決定変数（制御変数，制御可能揚水量），Q＝制御不可能揚水量，S＝貯留係数，T＝透水量係数，$\underline{\Phi}$＝状態変数下限（最低の地下水水頭要求値），$\overline{\Theta}$＝決定変数上限値（制御可能揚水量の上限値），　Ω＝全解析領域，$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$＝境界.

2．2　有限要素・動的線形計画法の定式化

基礎偏微分方程式系を離散化するために有限要素を用いると、次のような有限要素・動的線形計画法の定式化が得られる。

1）目的関数

$$Z = Opt \sum_{\tau=1}^{T}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^\tau\phi_n^\tau + \sum_{i=1}^{I}\beta_i^\tau\theta_i^\tau\right) \approx Max\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\Delta t\,\theta_i^\tau \qquad (10)$$

subject to:

2）状態方程式　$-[C]\left\{\phi_n^{\tau-1}\right\}+[A]\left\{\phi_n^\tau\right\}+[D]\left\{\theta_i^\tau\right\} = -\left\{Q_n^\tau\right\}$　（τ＝1～T）　(11)

3）制約条件　$\left[g^\phi\right]\left\{\phi_n^\tau\right\} \geq \left\{\underline{\Phi}_i^\tau\right\}$　（τ＝1～T）　(12)

$\left[g^\theta\right]\left\{\theta_i^\tau\right\} \leq \left\{\overline{\Theta}_i^\tau\right\}$　（τ＝1～T）　(13)

4）変数非負の条件　$\left\{\phi_n^\tau\right\} \geq 0$　（τ＝1～T）　(14)

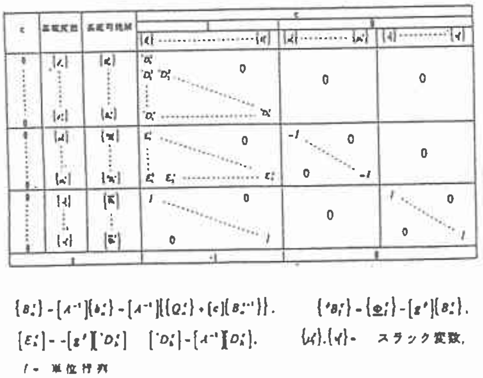
$\left\{\theta_i^\tau\right\} \geq 0$　（τ＝1～T）　(15)

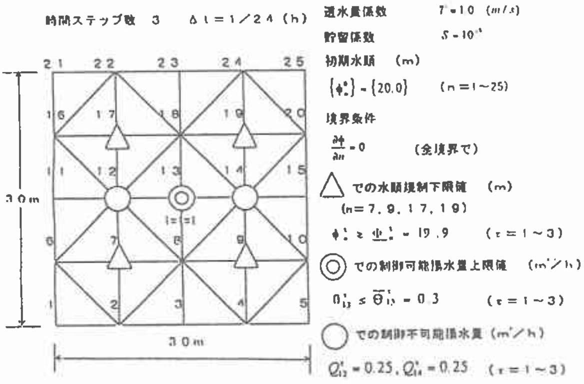
3．効率的計算法による解法

線形計画法の問題は、一般的には２段階シンプレックス法を用いて解かれる。この２段階シンプレックス法は、（１）第Ｉ段階（初期基底可能解を求める計算）、（２）第Ⅱ段階（最適解を求める計算）からなり、

人工変数の導入による膨大な計算機容量と計算時間が必要となる。しかし、本研究では、はじめに、制御可能揚水量を非基底変数（$\{\theta_i^\tau\}=0$）とすることによって、初期基底可能解を容易に見つけることができる効率的計算法を工夫した。得られた最初のシンプレックスタブローを表－1に示す。

表－1　効率的計算法による最初のシンプレックスタブロー





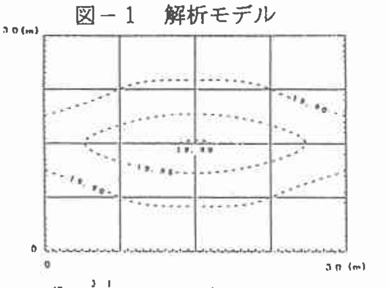
図－1　解析モデル

4．有限要素・動的線形計画法による地下水モデルの最適制御

図－1に示すモデルの解析を行った（計算機　CRAY EL92/200を使用）。計算結果のうち水頭分布（τ＝3）と目的関数の最適値を図－2に示す。2段階シンプレックス法と効率的計算法の比較を表－2に示す。

表－2　2段階シンプレックス法と効率的計算法の計算繰り返し回数と計算時間の比較

計算法	計算繰り返し回数		計算時間
	第Ｉ段階	第Ⅱ段階	
2段階シンプレックス法	9 1	1 0	1 sec以下
効率的計算法	計算不要	4	5 sec



$$Z=\sum_{\tau=1}^{3}\sum_{i=1}^{1}\Delta t\,\theta=\Delta t(\theta_1^1+\theta_1^2+\theta_1^3)$$
$$=0.417\times(0.245+0.300+0.300)$$
$$=0.352\,(m^3)$$

図－2　水頭分布（τ＝3）

5．結語

本研究で工夫された地下水の最適制御のための有限要素・動的線形計画法の効率的計算法は、一般的な線形計画法の解法の第Ｉ段階を省略することができるために、表－2に示すように計算機容量と計算時間を大幅に節約することになる。また、少ない計算量で最適解が得られるために誤差の集積がおこらず計算精度が良くなる。これらのことにより、本効率的計算法は大規模なモデルの解析を可能にすることになる。

—参考文献—

1） Aguado, E.　and Remson, I.:Ground-Water Hydraulics in Aquifer Management, Proc. of ASCE., Vol.100, No. HY1, pp.103～118, January, 1974.， 2） 上田・神野・長野：広領域地下水からの最適取水について, 土木学会論文報告集, 第２８３号, pp.33～43, 1979年3月.， 3） T.Futagami, N.Tamai and M.Yatsuzuka, "FEM Coupled with LP for Water Pollution Control", J. Hyd. Div. ASCE, Vol.101, No. HY7, 1976, pp.881～897.， 4） T.Futagami, et al, "Transient Finite Element & Linear Programming Method in Environmental Systems Control", Proc., IFAC Environmental Systems Symposium, 1977, Pergamon, pp143～150.