

被害発生率のベイズ推定に基づくシステム信頼性解析

広島工業大学工学部 正会員 能島暢呂

1. はじめに 地震防災計画において重要な地震被害の予測においては、現象の精緻なモデル化が困難であったり、予測対象が広範で多数になる場合が多い。そのため、過去の震害事例から算定された被害発生率に基づいた、簡易な被害予測手法が提案されている。しかし、統計データとしての不完全さ・不十分さゆえに、被害発生率そのものの妥当性が問われることも少なくない。災害のように稀な現象においては、同一条件下での繰り返し観測によるデータ充足が期待できないため、ベイズ推定法に基づく統計的推論¹⁾が有用であり、これまで、歴史地震データに基づく地震発生率の算定²⁾、労働災害の発生頻度の分析³⁾、工学システムの信頼性解析⁴⁾など、広い分野で適用されている。本研究は、ベイズ推定法をシステム要素の被害発生率の推定に適用し、被害発生率の不確定性を考慮して直列・並列のシステム信頼性の確率分布を誘導するものである。

2. 被害発生率のベイズ推定 図1のように、全長 L_0 の構造物を考える。被害発生が一様ランダムで、その単位長さあたりの発生率を λ で表す。構造物に n_0 箇所の被害が発生した場合、 λ の最尤推定量は $\hat{\lambda} = \frac{n_0}{L_0}$ となるが、ベイズ推定法を適用すると、被害箇所数 n はポアソン分布に従うから

$$P(n|\lambda) = \frac{(\lambda L_0)^n e^{-\lambda L_0}}{n!} \quad (1)$$

が尤度関数となる。「あいまいな事前分布」を仮定した場合、 n_0 箇所の被害情報を得た後の λ の事後分布は、

$$f_{\lambda}(\lambda) = P(\lambda|n_0) = \frac{P(n_0|\lambda)}{\int_0^{\infty} P(n_0|\lambda) d\lambda} = \frac{L_0 (\lambda L_0)^{n_0} e^{-\lambda L_0}}{n_0!} \quad (2)$$

のようにガンマ分布となり、モード、期待値、分散はそれぞれ

$$\lambda_{mode} = \frac{n_0}{L_0} = \hat{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \frac{n_0 + 1}{L_0}, \quad \sigma_{\lambda}^2 = \frac{n_0 + 1}{L_0^2} \quad (3)$$

となる。図2は、 $L_0 = 100$ において n_0 を変化させた場合の $f_{\lambda}(\lambda)$ である。被災履歴がない ($n_0 = 0$) 場合にも発生率は0とはならず、指数分布の事後分布を持つ。図3は、 $\hat{\lambda}$ を一定値 0.05 に保ち、 L_0, n_0 を変化させた場合について示したものである。被害発生率算定のためのデータが豊富に得られるに従って、ばらつきが減少している。また λ の分布が式(2)で与えられた場合、長さ L の構造物の被害発生箇所数が n となる確率(の期待値)は、式(1)と式(2)の混合分布として、次式の負の二項分布で与えられる。

$$\begin{aligned} P(N=n|n_0) &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda L)^n e^{-\lambda L}}{n!} f_{\lambda}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{(n+n_0)!}{n!n_0!} \left(\frac{L}{L+L_0} \right)^n \left(\frac{L_0}{L+L_0} \right)^{n_0+1} \quad (4) \end{aligned}$$

図4は、 $L = 10$ としてポアソン分布と負の二項分布の比較を示したものである。また一端からの連続した連結長さの期待値 $\bar{L}_S$ は、次式のようにになる。

$$\bar{L}_S = \int_0^{\infty} \left[\int_0^L e^{-\lambda x} dx \right] f_{\lambda}(\lambda) d\lambda = \frac{L_0}{n_0} \left\{ 1 - \left(\frac{L}{L+L_0} \right)^{n_0} \right\} \quad (5)$$

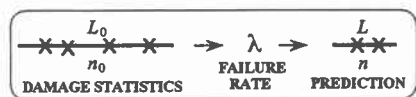


図1 被害データに基づく被害発生率および被害発生数の推定

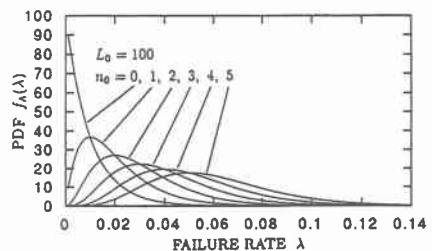


図2 被害発生率の事後分布(1)

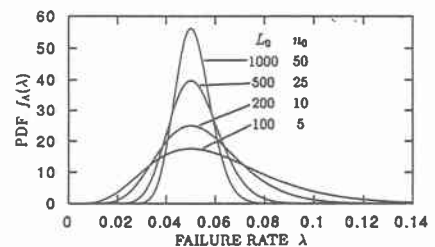


図3 被害発生率の事後分布(2)

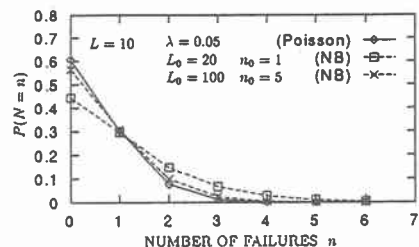


図4 被害発生数の確率関数(ポアソン分布と負の二項分布)

3. 被害発生率に基づく信頼度の確率分布 ベイズ推定を用いると、被害発生率 λ は式(2)に従う確率変数であると解釈できる。一般には $P(N = n)$ の確率分布を求めることは困難であるが、 $n = 0$ の場合(無被害確率)については容易に確率分布を誘導できる。長さ L の要素信頼度 r を確率変数 λ の関数として

$$r = P(N = 0) = g(\lambda) = e^{-\lambda L} \quad (6)$$

とすると、確率変数の関数の確率密度関数の誘導法¹⁾により、

$$f_R(r) = f_\Lambda(g^{-1}) \left| \frac{dg^{-1}}{dr} \right| = \frac{r^{\frac{L_0}{L}-1} (-\ln r)^{n_0}}{\left(\frac{L}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (7)$$

で与えられ、モード、期待値、分散はそれぞれ

$$r_{mode} = e^{-\frac{n_0}{L_0}L} = e^{-\lambda L}, \quad \bar{r} = \left(\frac{L_0}{L+L_0}\right)^{n_0+1} \\ \sigma_r^2 = \left(\frac{L_0}{2L+L_0}\right)^{n_0+1} - \left(\frac{L_0}{L+L_0}\right)^{2(n_0+1)} \quad (8)$$

となる。図5は $\lambda = 0.05$ に保ち L_0, n_0 を変化させ、 $L = 10$ の要素信頼度の確率密度関数を求めたものであり、図3とほぼ同様の傾向となっている。図6は同じ条件で、 r_{mode} および $\bar{r} \pm \sigma_r$ をプロットしたものである。このケースでは、被害発生率 λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ に基づく r_{mode} は要素信頼度を過大評価する傾向にあり、データが少ない(L_0 が小さい)場合に特に著しい。

4. 直列・並列システムのシステム信頼度の確率分布 長さ L の構造物を m 個組み合わせた直列および並列システムを考える。個々の要素の破壊が相互に独立であると仮定すると、それぞれの信頼度 r_S, r_P は、要素信頼度 r の関数として、

$$r_S = \prod_{i=1}^m r_i = r^m, \quad r_P = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - r_i) = 1 - (1 - r)^m \quad (9)$$

となるから、その確率密度関数は次式で与えられる。

$$f_{R_S}(r) = \frac{r^{\frac{L_0}{mL}-1} (-\ln r)^{n_0}}{\left(\frac{mL}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!}, \quad f_{R_P}(r) = \frac{\{1 - (1 - r)^{\frac{1}{m}}\}^{\frac{L_0}{L}-1} [-\ln\{1 - (1 - r)^{\frac{1}{m}}\}]^{n_0} (1 - r)^{\frac{1}{m}-1}}{m \left(\frac{L}{L_0}\right)^{n_0+1} n_0!} \quad (10)$$

同一要素数からなるシステムの中で、両システムは信頼度の上・下限を与えるものである。要素数 $m = 4$ までの直列・並列システムの信頼度の確率密度関数を図7に示す。

5. おわりに 被害発生率は、被害予測のパラメータとしてばかりでなく、被害要因分析における被説明変数として利用されることもあり、利用価値が高い。本研究ではベイズ・アプローチにより、不確実性を包含した形で被害発生率およびシステム要素信頼度を評価したうえで、システム信頼性解析への簡単な適用例を示した。現在、種々の被災統計データへの適用を検討している段階である。

【参考文献】 1) Ang, A. H-S and Tang, W. H.: Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol. I-Basic Principles, John Wiley & Sons, Inc., 1975. (伊藤・亀田共訳: 土木・建築のための確率・統計の基礎, 丸善, 1977年.) 2) Benjamin, J.R., "Probabilistic Models for Seismic Force Design," Proc of ASCE, Vol. 94, No. ST5, May 1968, pp. 1175-1196. 3) 花安繁郎: 災害頻度率の変動を考慮した労働災害の発生特性に関する研究, 土木学会論文集, No. 498/VI-24, 1994.9, pp. 115-124. 4) Sharma, K.K. and Bhutani, R.K. "Bayesian Reliability Analysis of a Parallel System," Reliability and System Safety, Vol. 37, 1992, pp. 227-230.

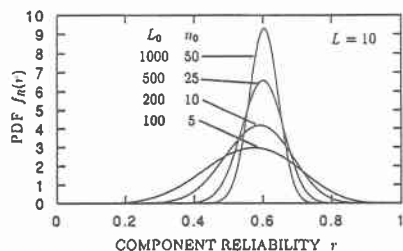


図5 要素信頼度の確率密度関数

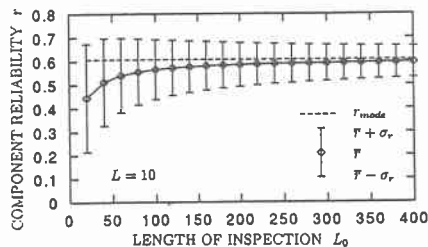


図6 要素信頼度のモードおよび平均値±標準偏差

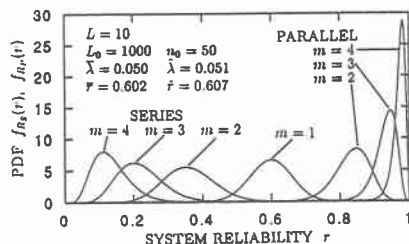


図7 直列・並列システムの信頼度の確率密度関数