波動伝播問題における有限要素法の精度

山口大学工学部　正会員　三浦　房紀
（株）エース　正会員○兼清　珠枝

1. はじめに

有限要素法(FEM)を用いれば、理論的には、解析対象がどのように複雑な連続体であっても、メッシュを細分することで正確な解析が可能とされている。しかし、実際にはまだ解決されなければならない多くの問題が残されている[1)]。それらの問題の中で最も基本的な問題の一つに波動の伝播現象の解析がある。本研究では有限要素法の精度に影響を与えると考えられる無次元量等をパラメータとし、単純なモデルを用いてパラメータスタディを行った。そして、波動伝播現象の理論解とパラメータスタディによる数値解とを比較することによって有限要素法の精度を検討した。

2. 精度の比較方法

精度に影響を与えると考えられるパラメータとして、有限要素のメッシュサイズ、質量マトリクス、波動の振動数、伝播速度を取り上げ、表-1に示す設定値に対してパラメータスタディを行った。質量マトリクスについては、集中質量マトリクス、整合質量マトリクス、及びこれら2つのマトリクスの平均の平均質量マトリクスを用いた。動的有限要素解析により、解析モデルの各節点の加速度、速度、変位、要素内応力の時刻歴を求めた。それぞれ得られた応答波形に対し、解析解と波動論に基づいた理論解とを最大振幅、及び波形の形状誤差について、次式で示す2つの無次元量U1、U2を用いて比較を行なった。

$$U1=\frac{\lambda}{L}=\frac{V}{L\cdot\lambda}\ \cdots(1)\qquad U2=\frac{V\cdot\Delta t}{L}\ \cdots(2)$$

表-1　パラメータの設定値

メッシュサイズ(m)	2.5	5.0	10.0
質量マトリクス	整合	集中	平均
振動数(Hz)	2	4	10
伝播速度(m/s)	100	200	400

ここに、λは波長、Vは波の伝播速度、fは振動数、Lはメッシュサイズを示す。形状誤差の比較は、波長の周期をT、理論解の波が到達する時刻をt_0、1波長全てが通過する時刻をt_1とすると、次の3つの領域(t_0-Tからt_1+Tまでの3T時間、t_0-Tからt_0までのT_0時間、t_1からt_1+TまでのT_1時間)を考え(図-1参照)、図-1の斜線部を面積誤差とし次式により割合E(%)を求めた。

$$E=\sum_{i=0}^{n}\sqrt{(p_i-q_i)^2}\cdot\Delta t\ \cdot 100/D\quad\cdots(3)$$

ここに、Δtは解析の時間間隔で0.01秒、Dは理論解曲線の面積、nは精度の検討の対象となるステップ数。

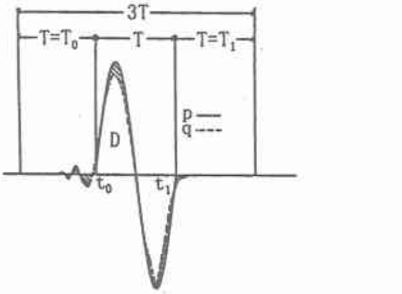

図-1　理論解pと数値解析解qの形状誤差

3. 解析結果

図-2に示す解析モデル(単位体積重量1.0t/m³、ポアソン比0.4、減衰定数0%)の節点1、2へsin波1波長を直接入力し、モデル内の3つの地点(Point1,2,3)における加速度、速度、変位、Point1,2,3を右下節点とする要素内応力の時刻歴応答を求めた。以下に述べる誤差は、これら3点で求めたものの平均値である。なお、最大振幅比は1.0に近いほど、また形状誤差は0%に近いほど精度が良いことを意味する。

最大振幅比、形状誤差のいずれもU1に関しては全て、加速度、速度、応力、変位の順で精度がよくなる傾向があった。

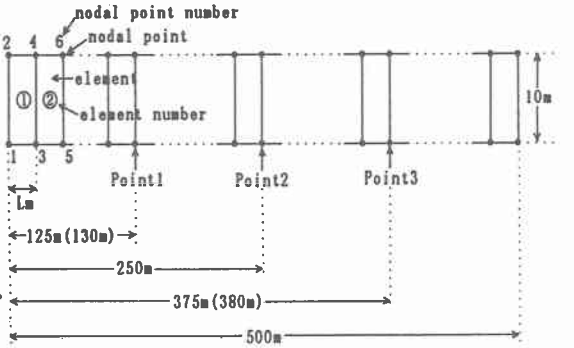

図-2　解析モデル

3.1 振幅割合による比較

図-3 はパラメータ U1 に対する速度応答の最大振幅比を示したものである。これより U1 に関しては U1<20 では精度の分布にばらつきが見られる。U1>20 では、ほぼ 1.0 付近に分布し、精度が良くなることが分かる。U2 に関しては、振動数に依存し、低振動数(2Hz)では 1.0 に近い分布を示すが、高振動数(10Hz)では、0.6 前後となり精度が悪くなることが分かった。質量マトリクスの違いに関しては U1、U2 共に顕著な違いは認められなかった。

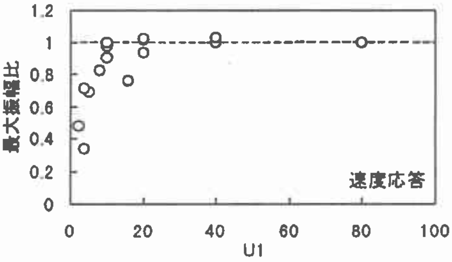

図-3　理論解に対する解析解の最大振幅比
(整合質量マトリクス)

3.2 面積誤差による比較

(1)3T 時間での比較

図-4 は集中質量マトリクスのパラメータ U1 に対する速度応答面積誤差を示したものである。U1>20 で精度が良くなることが分かる。また、質量マトリクスについては、多少だが平均質量マトリクスの精度が良い傾向がみられた。図-5 は集中質量マトリクスについて、U2 と面積誤差の関係を振動数をパラメータにしてまとめたものである。U2<0.5 では、各振動数とも精度はばらつくが、U2>0.5 では低振動数ほど安定して精度が良くなることが分かる。なお、質量マトリクスに関しては U1、U2 共に顕著な違いはなかった。

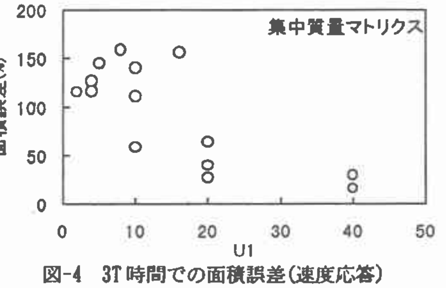

図-4　3T 時間での面積誤差(速度応答)

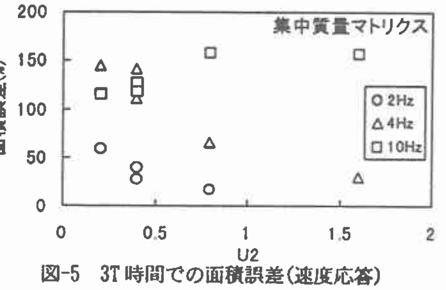

図-5　3T 時間での面積誤差(速度応答)

(2)T_0時間での比較

U1、U2 に共通して、整合質量マトリクスは他の質量マトリクスに比べ精度が悪かった。これは、本来波動が到達する前にあたかも波動が到達するかのような応答が表れるためである。精度は U1>20、U2>0.5 において良好であった。図-6 は U1 に関する平均質量マトリクスと集中質量マトリクスの面積誤差の比較である。これより、平均質量マトリクスは、整合質量マトリクス、集中質量マトリクスの平均であるにもかかわらず、集中質量マトリクスよりも良い精度を示し、その適用性が確認できた。

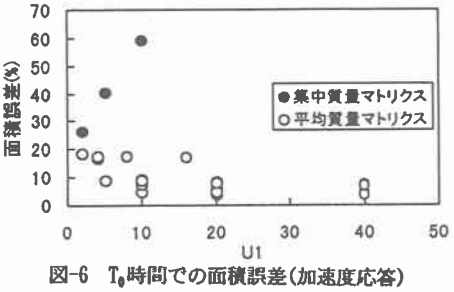

図-6　T_0時間での面積誤差(加速度応答)

(3)T_1時間での比較

(1)の 3T 時間での比較と同様に U1 については、U1>20 で精度が良く、U2 においても U2<0.5 で低振動数のみ、安定した結果が得られた。

4. 結論

振動数が同じとき、加速度、速度、応力、変位の順で精度が良くなり、また高振動数では精度が悪くなった。質量マトリクスでは、平均質量マトリクスの有効性が確認された。

パラメータの値が U1>20、U2>0.5(低振動数領域) を満足する時、比較的精度の良い安定した解を得ることが出来ると考えられる。今後の課題としては、無次元量 U2 では振動数の影響が精度に表れてくるため、これを解消すべき U2 に変わる新たなパラメータを設定し、同様の比較を行うことが挙げられる。

参考文献

1)川本眺万・林　正夫：地盤工学における有限要素解析,培風館,pp8,1978.