

低減積分を用いた流動要素法の適用について

鳥取県 〇三村祐司 鳥取大学工学部 木山 英郎
鳥取大学工学部 藤村 尚 鳥取大学工学部 西村 強

1. はじめに

流動要素法 (Flow Element Method ; FLEM) は、個別要素法 (DEM) の基本となっている運動方程式の陽形式時間差分による逐次解法を活かして、各要素の自由な変形を許しながら要素間の連続性を保持し、全体としての大変形から流動までを解析できる手法である。

計算精度を損なうことなく、計算速度を速めることは、数値解析法を実用問題に適用する場合、重要な事柄である。計算速度を速めるために、より高速の計算機を使用することも一案であるが、ここでは要素剛性マトリックスの形成法を考える。これを効率的に行うには、数値積分をやめ、一点積分に基づいたような方法を取ることである。いわゆる低減積分の応用である。しかし、低減積分の問題は、境界や荷重条件により物理的に不都合な hourglass とよばれる特異変形モードが出てくることである。そこで本文では、既往の手法に習いながら、どのようにFLEMに導入するかについて検討を行うものである。

2. 片持ち梁の解析

図-1は解析モデルを示している。高さ8cm、幅40cm、節点数(質点数)15、要素数8の片持ち梁である。要素は高さ4cm、幅10cmの長方形平面ひずみ要素である。境界条件としては、a bを固定端とし、曲げ、圧縮問題をそれぞれ考えた。図-2、図-3中に示すように、自由端の節点に曲げ問題では荷重P(=2.65gf)、圧縮問題では1000Pをそれぞれ作用させた。なお、図中には変位のスケールを示してある。

本解析で用いた解析定数を表-1に示す。ただし、自重は考慮していない。

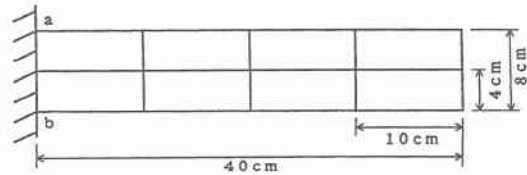
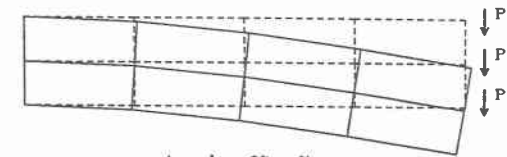


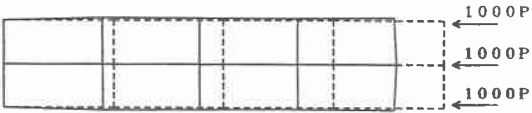
図-1 解析モデル

表-1 解析定数

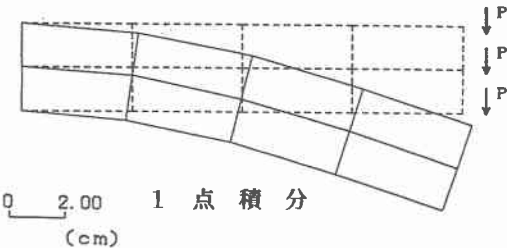
ヤング率	$E = 100 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$
密度	$\rho = 2.65 \text{ (g/cm}^3\text{)}$
ポアソン比	$\nu = 0.3$
時間増分	$\Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ (sec)}$



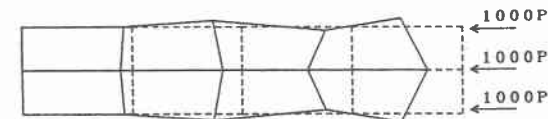
4 点 積 分



4 点 積 分



1 点 積 分



1 点 積 分

図-3 解析結果

3. FLEMへの低減積分の導入^[1]

前節の解析結果を見てもわかるように、四点積分に比べて一点積分による計算では、不合理な変形の発生が確認された。そこで、これをどのように制御してゆくか検討を行う。詳しい誘導過程は文献に譲り、ここでは主な式のみ示す。

いま、対象とする解析領域を図-4のような座標系で表す。平面四辺形要素の形状関数(1)を用いて、要素内変位の近似を表すと、式(2)、(3)のようになる。

$$N_\alpha(s, t) = \frac{1}{4} (1 + s_\alpha s)(1 + t_\alpha t), \quad \alpha = 1, \dots, 4 \quad \dots (1)$$

$$u = s \cdot u + (b_x \cdot u) x + (b_y \cdot u) y + (g \cdot u) s t \quad \dots (2)$$

$$v = s \cdot v + (b_x \cdot v) x + (b_y \cdot v) y + (g \cdot v) s t \quad \dots (3)$$

ここに、

$$b_x = \frac{1}{4} \{ (I_t \cdot y) I_s - (I_s \cdot y) I_t \}, \quad b_y = \frac{1}{4} \{ (I_t \cdot x) I_s - (I_s \cdot x) I_t \} \quad (a) \text{ 局所座標系}$$

$$g = h - (h \cdot x) b_x - (h \cdot y) b_y, \quad s = a - (a \cdot x) b_x - (a \cdot y) b_y,$$

$$a^T = \frac{1}{4} \{ 1, 1, 1, 1 \}, \quad I_s^T = \frac{1}{4} \{ -1, 1, 1, -1 \},$$

$$I_t^T = \frac{1}{4} \{ -1, -1, 1, 1 \}, \quad h^T = \frac{1}{4} \{ 1, -1, 1, -1 \},$$

このように展開した変位を使うことによって、ひずみ成分が、ひずみベクトルの定数項、s-, t-方向補正項の和として表現される。

$$e = e_0 + \sum_j e_s + \sum_j e_t \quad \dots (4)$$

$$e_0 = \begin{Bmatrix} b_x \cdot u \\ b_y \cdot v \\ b_y \cdot u + b_x \cdot v \end{Bmatrix}$$

$$e_s = \begin{Bmatrix} -(I_s \cdot y)(g \cdot u) \\ (I_s \cdot x)(g \cdot v) \\ (I_s \cdot x)(g \cdot u) - (I_s \cdot y)(g \cdot v) \end{Bmatrix}$$

$$e_t = \begin{Bmatrix} (I_t \cdot y)(g \cdot u) \\ -(I_t \cdot x)(g \cdot v) \\ -(I_t \cdot x)(g \cdot u) + (I_t \cdot y)(g \cdot v) \end{Bmatrix}$$

節点変位ベクトル d を

$$d^T = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4 \} \quad \text{とすると} \quad \dots (5)$$

$$e_0 = B_0 d, \quad e_s = B_s d, \quad e_t = B_t d$$

B_0, B_s, B_t は要素変位マトリックスの定数項、s-, t-方向補正項である。

式(4)で得られたひずみを用いて、ひずみエネルギー密度の評価をすると、最終的に次式を得る。

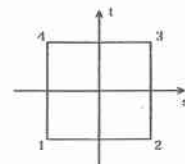
特に、要素が長方形の場合には

$$\int_{\Omega_e} \bar{e}^T D e d\Omega \approx \bar{d}^T (B_0^T D B_0) A d + c_{11} \beta_s \bar{d}^T (B_s^T D B_s) d + c_{11} \beta_t \bar{d}^T (B_t^T D B_t) d \quad \dots (6)$$

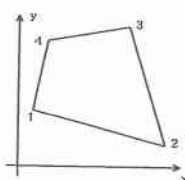
となる。ここに c_{11} は定数であり、要素が長方形の場合には $c_{11} = 4/3$ と与えられる。上式を、FLEMにおける要素剛性マトリックスとして用いればよい。

参考文献

- [1] Byeong C. KOH and Noboru Kikuchi: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 65, pp.1~46, 1987.



(a) 局所座標系



(b) 直交座標系

図-4