

ULTIMATE QUICKEST法を用いた移流拡散方程式の数値解析

水資源開発公団	正員	○石塚泰信
岡山大学	正員	河原長美
岡山大学	学生員	由良英作

1. はじめに

本研究では成層流場等の濃度勾配が大きい場の拡散現象の数値解析の精度の向上を目的として、ULTIMATE QUICKEST法を取り上げ、1次元の拡散現象に関して検討を加えた。ここでは、拡散方程式の差分スキームとして移流項にULTIMATE QUICKEST法、拡散項にオイラー法を適用して得られた結果を、理論解や移流項にリープフロッグ法、拡散項にオイラー法を適用したものと比較することによりULTIMATE QUICKEST法の適用性と有効性について検討を加える。

2. 解析方法

(1) 基礎式および差分スキーム

拡散方程式の無次元表現

$$\frac{\partial c}{\partial T} + \frac{u \cdot t^*}{x^*} \frac{\partial c}{\partial X} = \frac{Dt^*}{x^{*2}} \frac{\partial^2 c}{\partial X^2}$$

理論解

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{S \sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(x-\xi-ut)^2}{4Dt}\right]$$

ここに、 x^*, t^* は基準となる空間および時間スケール、 X, T は無次元空間、時間スケールである。また、 $g(\xi)$ は初期濃度分布を表す。

(2) 初期条件

初期濃度分布として図-1に示すものを用いる。

(3) ULTIMATE QUICKEST法

ULTIMATE QUICKEST法では、次に示す3次の上流差分を用い、1. から6. の手順で計算を行う。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - Cr(\phi_r - \phi_l) \quad \phi_r = \frac{1}{2} \left[(\phi_{i+1}^n + \phi_i^n) - Cr(\phi_{i+1}^n - \phi_i^n) \right] - \frac{1-Cr^2}{6} \left(2Dr^2 - \frac{SGN(Cr)}{2} \delta^3 \right)$$

ここで、 $2Dr^2 = \phi_{i+2}^n - \phi_{i+1}^n - \phi_i^n + \phi_{i-1}^n$ 、 $\delta r^3 = \phi_{i+2}^n - 3\phi_{i+1}^n + 3\phi_i^n - \phi_{i-1}^n$ である。ただし、 $SGN(Cr)$ は Cr の符号を表す。

1. どのフェイスについても $SGN(u_f)$ に基づく上流(U)、下流(D)、中流(C)を設定し、 $DEL = \phi_D^n - \phi_U^n$ 、 $ADEL = |DEL|$ をどのフェイスに対しても計算する。

2. $ACURV = |\phi_D^n - 2\phi_C^n + \phi_U^n|$ を計算し、 $ACURV \geq ADEL$ の場合 $\phi_f = \phi_C^n$ とし、隣接したフェイスに移る。

3. $ACURV < ADEL$ の場合、レファレンスフェイスバリュ $\phi_{REF} = \phi_U^n + (\phi_C^n - \phi_U^n)/Cr$ をどのフェイスに対しても計算する。また、3次のフェイスバリュ $\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_D^n + \phi_C^n) - \frac{Cr}{2}(\phi_D^n - \phi_C^n) - \frac{1-Cr^2}{6} CURV$ を計算する。ここで、 $CURV = \phi_D^n - 2\phi_C^n + \phi_U^n$

4. $DEL > 0$ の場合、 ϕ_f は ϕ_C^n より下で、 ϕ_{REF} と ϕ_D^n の小さい方よりも上に制限する。

5. $DEL < 0$ の場合、 ϕ_f は ϕ_C^n より上で、 ϕ_{REF} と ϕ_D^n の大きい方よりも下に制限する。

6. $\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - Cr(\phi_r - \phi_l)$ により次のフェイスに進む。

3. 解析結果

移流項にULTIMATE QUICKEST法を適用した場合の計算結果を図-3に、リープフロッグ法を適用した場合の結果を図-4にそれぞれ示す。両者の計算条件は、スキームを除けば全く同一である。図-3, 4より明らかなように、ULTIMATE QUICKEST法では、急勾配の分布であっても理論解と一致する。これに対し、リープフロッグ法では、sin曲線の初期分布に関しては比較的良好な結果が得られているが、ステップ状の急勾配の分布の計算においては大きく振動している。ULTIMATE QUICKEST法では、特に急勾配の分布の計算において高精度の再現性が得られることが明らかである。逆に、極端な濃度分布でなければ、リープフロッグ法でも十分な精度が得られる。

差分式は、クーラン数 ($u \Delta t / \Delta x$) と拡散数 ($D \Delta t / \Delta x^2$) で表される。移流項にULTIMATE QUICKEST法を、

拡散項にオイラー法を用いる場合の安定領域として図-2が得られた。図-2の安定領域内では、時間ステップ、空間ステップに関係なく、高精度の再現性が得られた。

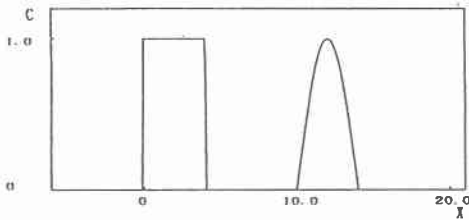


図-1 初期濃度分布(矩形波、sin曲線)

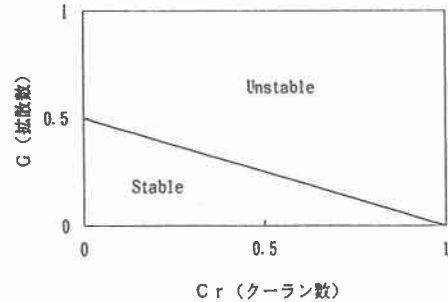


図-2 安定領域

4. おわりに

本研究では、ULTIMATE QUICKEST法をオイラー法と併用して数値シミュレーションする場合の適用性に関して検討を加えた。

移流拡散方程式の数値解析において移流項にULTIMATE QUICKEST法を適用すると、濃度分布が急激に変化する場所において精度の高い再現性が得られる。それに対して、移流項にリーブロッグ法を適用した場合には、濃度勾配が急激に変化する場所において、大きな振動が生じた。従って、濃度勾配が大きい拡散現象にULTIMATE QUICKEST法を適用することは有効である。

また、移流項にULTIMATE QUICKEST法を、拡散項オイラー法とを適用した場合、数値シミュレーション結果に影響を及ぼすのはクーラン数と拡散数であり、これらが図-2に示す安定領域にあれば流速、拡散数、時間ステップ、メッシュ幅を自由に選択できる。実際の河川に適用する場合、流速や拡散係数は現象の性格から決定され、メッシュ幅は地形表現上からの制限が加わるため、時間ステップ幅により安定条件を満足させることになる。

今後、ULTIMATE QUICKEST法を2次元、3次元の移流拡散現象に適用し、その適用性について検討する予定である。

(参考文献)

- (1) B. P. Leonard: The ULTIMATE QUICKEST conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection: 1991-Elsevier Science Publisher B. V(North-Holland), P. 17-74
- (2) C. ZOPPOU, S. ROBERTS: Numerical Solution of The Advective-diffusion Equation: Modeling Change in Environmental Systems. 1993, P. 76~97
- (3) 古市 徹: 環境移流拡散現象の解析手法と数値シミュレーションに関する研究—有限要素法を軸として—: 京都大学大学院工学研究科博士論文昭和59年8月
- (4) 堀江 毅: 沿岸海域の水の流れと物質拡散に関する水理的研究: 運輸省港湾技術研究所No. 360 Dec 1980, P. 26~32
- (5) 元根 剛: 物質拡散の数値解析手法に関する研究: 岡山大学工学部土木工学科特別研究昭和60年2月

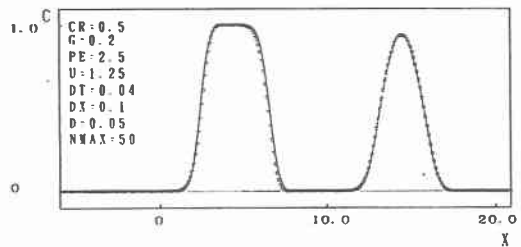


図-3 ULTIMATE QUICKEST法

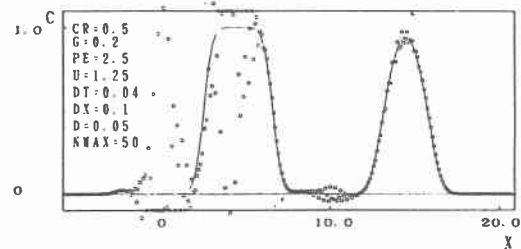


図-4 LEAP FROG法