有限要素の幾何学的性質の改良に関する研究

岡山大学大学院　学正員○藤後　尚史
日本技術開発（株）　田中　栄吾
岡山大学環境理工学部　正　員　谷口　健男

1．まえがき

有限要素法による解析に用いる離散化モデルの作成の一つに要素自動分割法がある。これにより作成される要素群の各要素の形状により同じ解析でも得られる解に差が現れる。良い解を得るには、この要素自動分割でひずんだ要素を作らないようにすることである。この要素自動分割により得られる要素の改良の一つとして、節点座標の変更による要素形状の改良、すなわち有限要素の純粋な幾何学的性質の改良がある。そこで、ここでは解の精度の確保あるいは保証するための手法としてラプラシアン法を基本とする手法の他に、アイソパラメトリック法を基本とする手法を提案する。

2．ラプラシアン法及びアイソパラメトリック法について

ラプラシアン法とは以下の式で示される位置に節点を移動させる手法である。

$$P(i)=\frac{1}{2n}\sum^{n}\{P(j)+P(k)\}$$

上式においてｉは、移動させたい節点であり、ｊとｋとをあわせて１個の三角形を構成している。P(i)、P(j),P(k)は、それら３頂点の座標値を、ｎは点ｉを共有する三角形の個数を示す。結局上式は点ｉをその点を頂点とするすべての三角形の面積の重心位置へ移動させることを示している。この作業を移動させたい節点（ひずんだ要素の頂点）について数回行い、その結果、収束した位置を新しい節点位置とする。
しかし、これは幾何学的に許されないような要素を発生させてしまうこともある。これは要素形状がひずんでいるところで多く発生するので、そのような箇所には適切な処理が必要となる。また、ラプラシアン法は節点を周辺の節点の重心位置へ移動させる手法であるから、ラプラシアン法を適用することによりかえって適用前よりもひずんだ要素を発生させてしまうことがある。そこで下の式で示される位置に節点を移動させる手法を適用する。

$$P(i)=\frac{1}{n(2-w)}\sum^{n}\{P(j)+P(l)-wP(k)\}$$

上式は、四角形要素についてのもので、ラプラシアン法と同様に、ｉ，ｊ，ｋ，ｌは四角形の各頂点であり、P(i)、P(j)、P(k)、P(l)はそれら４頂点の座標を、ｎは点ｉを共有する四角形の個数を示す。そして、点ｉの対角をなす点ｋに重みとして－ｗを付けているのがラプラシアン法との違いで、このｗに１を代入した場合を特にアイソパラメトリック法と呼ぶ。このアイソパラメトリック法の方がラプラシアン法よりも良い形状の要素を得られる場合もある。

3．２次元メッシュへの適用

２．で示したようにモデルにより両者を取捨選択する必要があると言える。この為にアイソパラメトリック法において１と設定した重みｗの値を変更し両者の中間の効果を得るようにする。この手法を実際のメッシュモデルへ適用する。

２次元メッシュへの適用（四角形要素）

取り扱うモデルに作意が加わらないように、あきらかにランダムに節点配置がなされていると思われる地形データを基に要素自動分割を行い試験用のメッシュモデルを作成した。

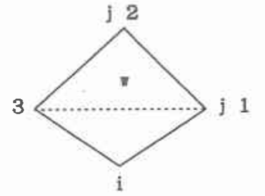
手法－1について

移動させたい節点の周辺要素の重心位置を計算する際、四角形要素を図－1のように2つの三角形に分割し、重みwを付ける点j2を含む三角形の面積にも重みwを付ける。後の作業はラプラシアン法と同様である。

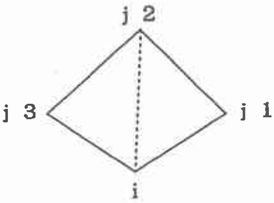
手法－2について

四角形要素を図－2の様に分割し点j2には手法－1と同様にwを付けるが、j1とj3についても（1－w）を乗ずる。この手法は周辺要素全体を考えたとき結局、各節点を2度ずつ評価することになり、wは手法－1の場合の2倍の重みを持つことになる。

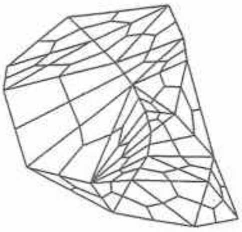
以下に、ラプラシアン法、手法－1、手法－2の適用結果を比較する。ここで、四角形要素にラプラシアン法を適用する場合、三角形要素にまず適用し、その後に三角形要素2つを用いて四角形要素にしている。



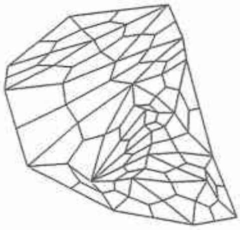
図－1



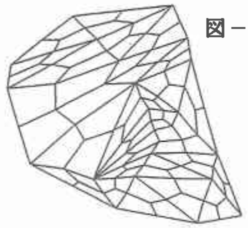
図－2



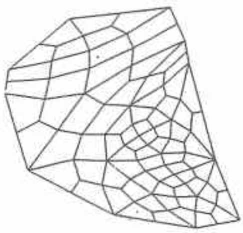
図－3　モデルとした2次元メッシュ



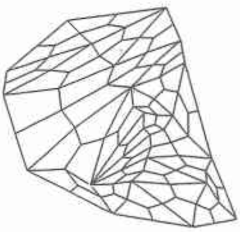
図－5（a）　手法－1の適用（w＝0．0）



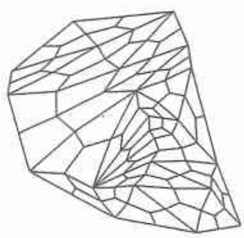
図－6（a）　手法－2の適用（w＝0．0）



図－4　ラプラシアン法の適用



図－5（b）　手法－1の適用（w＝0．25）



図－6（b）　手法－2の適用（w＝0．1）

この結果、手法－2に関しては余り有効であるとは考えにくい。グラフから判断して有効性が見られるのはラプラシアン法と手法－1のw＝0.0の場合である。手法－1のw＝0.0はラプラシアン法と大きな相違があるわけではないが、このモデルの場合点iから最も遠い点j2を評価しなかったことにより、いたずらに面積の大きな周辺要素に引きずられることがなくかえって好結果を生んだと言えるであろう。また、ラプラシアン法の場合、メッシュの中央付近に凹の四角形が発生している。その要素だけに注目すると手法－1や、手法－2の方が有効に働くことが言える。

4．おわりに

有限要素の幾何学的な性質の改良によって、ある程度の要素形状の改良が行えたと言えよう。移動させたい節点の対角に重みを付けることによって不適切な節点移動が抑制されることもあるが、通常ラプラシアン法を上回る有効性は認められない。結局重みの決定や手法の選択はユーザ自身の判断に委ねるほかない。さらに形状の改良を図るには、点の移動だけでなく、点の増減を図る改良手法の開発が必要であろう。

参考文献

谷口健男，ＦＥＭのための要素自動分割、森北出版，1992，9