

地下空間におけるジオデジック トラスドームの座屈挙動解析

BIFURCATION BEHAVIOR ANALYSIS OF GEODESIC TRUSS DOME IN AN UNDERGROUND SPACE

有尾 一郎¹⁾ ・ 亀岡 稔弘²⁾

Ichiro ARIO and Toshihiro KAMEOKA

¹⁾博士(工学) 広島大学助手 工学部第四類(建設系) (〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1)

²⁾広島大学大学院工学研究科構造工学専攻 (同上)

近年, 地下空間を利用するための地下ドーム構造物が創造されている。この地下ドームは地上のドームとは異なり, 土中の様々な負荷外力に耐えなければならない。ドーム構造のような対称性を持つ構造物は, その対称性に起因する分岐座屈が起こることが知られてきており, その構造物の形態解析が重要である。本研究は, その地下空間を確保するための骨組構造物としてバクミンスター・フラーが考案したジオデジックドーム(切頭二十面体トラスドーム)を取り上げ, 高次の対称性を持つ切頭二十面体トラス構造の形態に着目し, 形態変化と耐荷力との関係を明らかにする。地下構造物の形態/パラメータ解析を通して, 座屈耐荷力の変化を数値的に明らかにすることにより, 地下ドーム設計の基礎材料を提案する。

Key Words : geodesic dome, underground space, mode-switching behavior, symmetric structures

1. はじめに

大空間構造物の耐荷力は構造形態と深く関わり, 構造計画・デザインを考える上でも重要である。ドーム構造の形態構造において, ドームの対称性は外観の美しさという面だけでなく, 耐荷力との間にも密接な関係があることが知られてきている。R.Buckminster Fuller (1896~1983) は, 数多くの多面体構造を持つドーム構造物の設計・研究に従事し, 特に球状に三角形を貼り合わせてできるジオデジックドームが有名である^{1), 2), 3)}。その後有機化学分野の研究者 H.W.Kroto ら (1985) によってこのジオデジックドームの構造形態(別名 C_{60} フラーレン)が物質的に安定することを発見する⁴⁾。この構造形は正二十面体の全角頂を切頭することにより形づくられる。このような切頭二十面体フラーレンは, 全部で 120 個の独立な対称操作が存在し, D_{5d}, D_{3d} および D_{2h} 軸対称性を持つことが知られている⁵⁾。さらに最近では群論的アプローチによるドーム構造物の解析手法が文献^{6), 7), 8)}により確立している。

本研究では, R.Buckminster Fuller が設計したジオデジックドーム(あるいは有機化学の分野で安定な C_{60} フラーレン)を地下構造物に利用し, 図1のような切頭二十面体トラス構造(フラーレン構造)の座屈安定解析を考える。この高次の対称性を持つフラーレン構造の基本的な構造特性を調べることと, 構造形態と座屈耐荷力との関係を明らかにすることを目的に, 汎用構造解析プログラムを用いて, 座屈解析を行なった。こ

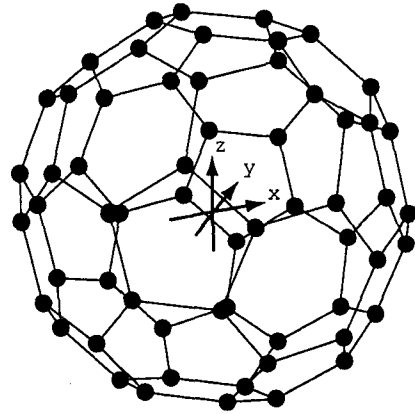


図1 切頭二十面体トラス構造 ($\gamma = 0.33, C_{60}$)

れにより, 形態パラメータ γ と耐荷力の関係を数値的に明らかにするとともに, 座屈荷重が最大となる最適なドーム形態について考察を行う。また, 正二十面体の1つの角頂部にもみ初期不整を与えた不完全な切頭二十面体トラス構造の座屈荷重と完全系の座屈荷重との違いについても考察する。

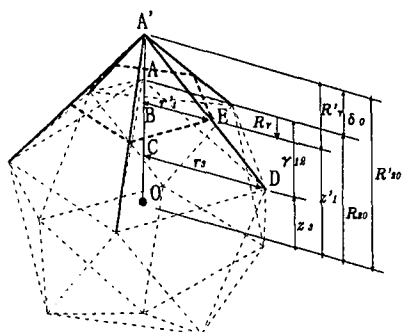


図2 正二十面体(破線)とパラメータ変数

2. 切頭二十面体フラレン構造

(1) フラレン構造とその対称性

C_{60} フラレン構造が幾何学的に基本となる正多面体は、正二十面体である。この正二十面体は、その面 ($F = 20$)、辺 ($E = 30$)、頂点 ($V = 12$) の間には、オイラーの公式

$$E = V + F - 2 \quad (1)$$

が成り立つ。また正二十面体は、すべて正三角形の面からなり、1つの頂点に5つの正三角形の集まる正多面体であり、群論的分類では点群 I_h に属する。正二十面体の全ての角頂から、ある高さの切頭を行うことによって、任意の切頭二十面体が得られる。この切頭高さを切頭前の角頂高さで正規化し、形態パラメータ(切頭パラメータ)を

$$\gamma = \frac{R_\gamma}{r_{12}}, \quad 0 < \gamma < 0.5 \quad (2)$$

と定義する。ここに、 R_γ は切頭高さを、 r_{12} は切頭前の正二十面体の角頂高さをそれぞれ表す(図2参照)。特に、 $\gamma = 0.33$ のとき有機化学の分野では炭素原子を60個持つ C_{60} フラレン分子としてよく知られている。任意の切頭二十面体の面数 ($F = 32$)、辺数 ($E = 90$)、頂点数 ($V = 60$) の間にもオイラーの公式(1)が当然成り立っており、対称性は正二十面体と同じ I_h に属する。また、多面体が球にどのくらい近いかを表す指標として、球形状が用いられる。切頭に対する切頭二十面体フラレンの球形状を表1に示す。ここに、多面体の表面積を S 、外接球の表面積を S_0 、体積を V 、外接球の体積を V_0 でそれぞれ表す。 C_{60} フラレンは、これらの多面体の中でかなり球に近いことが分かる。

切頭二十面体は、正五角形からなる面が12枚、六角形からなる面が20枚存在する。12枚の正五角形は、一対の向かい合った6組から成る。また、 C_5 、 C_2^2 、 S_{10} 、 S_{10}^2 という回転と反映の対称操作がそれぞれ12個存在し、 D_{5d} 軸対称性を持つ。また、20枚の六角形も一対の向かい合った10組から成るが、五角形の接続の仕方

表1 切頭正二十面体の球形状

切頭パラメータ γ	V/V_0	S/S_0	$S/S_0 \times (V_0/V)^{2/3}$
0.0 (正二十面体)	0.6055	0.7619	1.0646
0.1	0.7401	0.8539	1.0436
0.2	0.8268	0.9132	1.0367
0.3	0.8652	0.9394	1.0346
0.33 (C_{60})	0.8674	0.9409	1.0345
0.4	0.8522	0.9323	1.0372
0.5 (二十・十二面体)	0.7791	0.8906	1.0519
球	1.0000	1.0000	1.0000

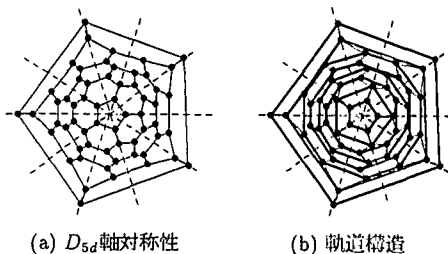


図3 切頭二十面体のシュレーゲル図

がくい違っているため、3 重回転対称の D_{3d} 軸対称性を持つ。このほか、30本の六角形同士がとなり合う辺も、一対の向かい合った15組存在し、ある一対の辺を水平におくと、水平面(赤道面)とその垂直二等分面の2つの鏡映面が現れ、 D_{2h} 対称群も存在する。切頭二十面体の形態は全部で120個の独立な対称操作が存在し、高次対称性を持つ。

(2) フラレンの座標系と軌道構造

図1のように中心を原点とする直交デカルト座標系をとる。切頭二十面体の各頂点を節点の座標 (x_i, y_i, z_i) とする。座標系の取り方は任意であり、本論文では切頭面のある一対を水平に配置したときの座標値を設定する。この多面体の平面表現法に図3(a)に示されるようなシュレーゲル(Schlegel)図がある。これは、1枚の五角形を接平面に広げて多面体のネットワークの残りの部分を平面上に展開したもので、多面体のトポロジー(位相幾何学)構造を表した図である。これを利用すると、図3のような軌道構造を持つことが分かる。それぞれの軌道上にある節点は同一の高さである。内側(上面側)の軌道から1, 2, ... 層目とすると、全部で8層存在する。これらの軌道を文献⁷⁾の対称性から分類すると、1, 2層目は1Vタイプ、3, 5層目は2Mタイプ、4, 6層目は2Vタイプ、および7, 8層目は1Mタイプの軌道構造を持つ。この軌道の対称性は D_{5d} 対称群を持つが、

その他に上半球 (1～4 層目) と下半球 (5～8 層目) の軌道は D_{2h} 対称群を持つ。このように多面体の軌道を明らかにしておくことは、多面体の対称性を考える上で重要である。

3. フラーレン構造の座屈解析

非載荷時のドーム構造を安定なつり合い状態にあるものとし、つり合い状態が安定から不安定に移る中立のつり合い状態となる臨界状態を調べ、構造物全体の座屈耐荷力を求めることとする。本研究においては座屈耐荷力と形態パラメータとの関係を明らかにするために、エネルギー法に基づく座屈解析を行うこととする。

(1) エネルギー法に基づく座屈解析法

全ポテンシャルエネルギー Π を一般化座標 θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて

$$\Pi(\theta_i) = \Pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (3)$$

と表す。 θ_i から $\theta_i + \delta\theta_i$ へ変位するときの全ポテンシャルエネルギーの全変分 $\Delta\Pi$ は、 $\Pi(\theta_i + \delta\theta_i) = \Pi(\theta_1 + \delta\theta_1, \theta_2 + \delta\theta_2, \dots, \theta_n + \delta\theta_n)$ であるから、

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \Pi(\theta_i + \delta\theta_i) - \Pi(\theta_i) \\ &= \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \dots + \frac{1}{n!}\delta^n\Pi \quad (4) \end{aligned}$$

と表される。系がつり合い状態にあるには、 Π の極値化のための必要条件から、その第 1 変分は零となる。すなわち、 $\delta\Pi = 0$ から、 $\delta\theta_i \neq 0$ では、系のつり合い条件は、

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

となる。系が安定なつり合い状態を保つには、 $\Delta\Pi > 0$ から、

$$\delta^2\Pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \delta\theta_i \delta\theta_j > 0 \quad (6)$$

と表される。また、 $\delta^2\Pi > 0$ は式 (6) の係数行列式

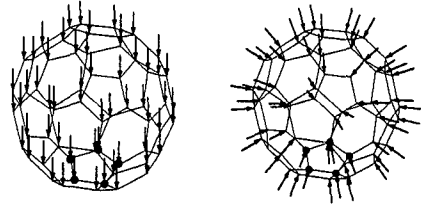
$$D = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \dots & \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_1\partial\theta_n} \\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_2^2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_n\partial\theta_1} & \dots & \dots & \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta_n^2} \end{vmatrix} > 0 \quad (7)$$

による判別式 $D > 0$ と等価である。ただし、対角要素がいずれも $\partial^2\Pi/\partial\theta_i^2 > 0$ ($i = 1, \dots, n$) である。

したがって、式 (7) より判別式

$$\cdot D = 0 \quad (8)$$

が中立のつり合い条件式となる。この式を解くことにより、 n 個の固有値 (臨界荷重) が求まり、そのうちの正の最小値が座屈荷重として工学的意味を持つ。



(a) 荷重ケース I

(b) 荷重ケース II

図 4 荷重ケース

(2) 解析条件

トラス部材の断面剛性 EA を一定とし、支持条件については、図 4 に黒丸 (●) で記した、最下部の 5 節点の変位を固定支持とした。

a) 完全ジオデジックドーム

図 4 に示す完全系のジオデジックドームを取り上げ、荷重ケース I と荷重ケース II の 2 パターンの荷重条件について考える。荷重ケース I は、図 4(a) に示すような地上のドーム構造物の自重を設定した荷重ケースである。切頭二十面体を構成する全 60 節点に鉛直下向きに載荷する荷重ケースである。また、荷重ケース II は、ジオデジックドーム構造が地中にあるものとして、単に半径方向に等方外圧がフラーレンの中心に載荷するケースである。これは図 4(b) に示すように、切頭二十面体を構成する 60 節点全てに、等価節点外力として与えることとする。

b) 不完全ジオデジックドーム

初期不整を持つ不完全なジオデジックドームの耐荷力を求め、完全系との座屈強度の違いについて調べる。図 2 に示す切頭二十面体の原形となる正二十面体の角頂 A から z 軸方向に δ_0 だけ点 A' にずれた二十面体を切頭することとする。その他の全ての角頂は不整がないものとする。

初期不整パラメータ ϵ を

$$\epsilon = \frac{\delta_0}{R_{20}} \quad (9)$$

と定義する。ここに、 δ_0 を初期不整量、 R_{20} を原点からもとの正二十面体の頂点までの距離とする。初期不整パラメータとして $\epsilon = \pm 5\%, \pm 10\%, \pm 15\%$ の 6 ケースを考える。また、初期不整が与えられたときの切頭パラメータ γ は、

$$\gamma = \frac{R'_L}{R'_{20} - z_3} \quad (10)$$

と定義する。ここに、ダッシュ (・)' は初期不整を考慮した変数を表し、 z_3 は 3 層目の軌道の z 座標値を表す。図 2 より、初期不整を考慮したときの中心 O から角頂 A' までを

$$R'_{20} = (1 + \epsilon)R_{20} \quad (11)$$

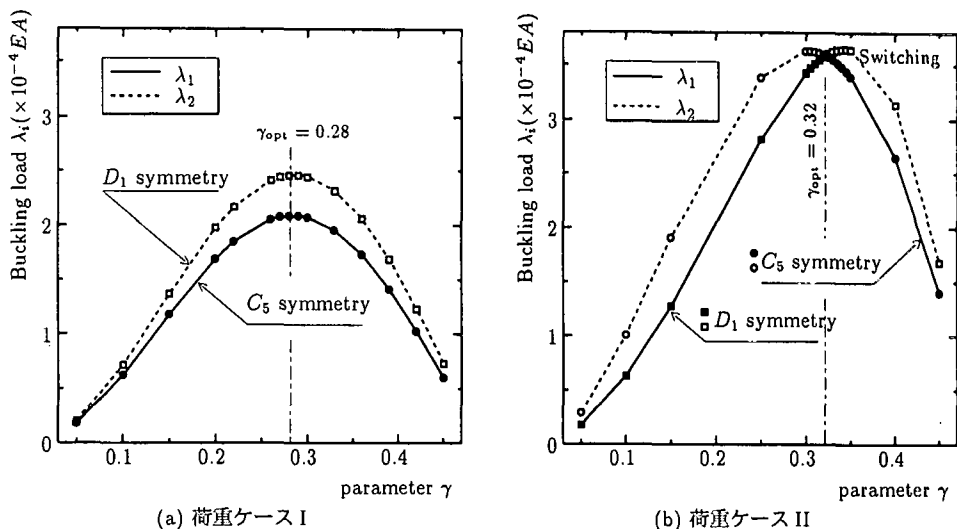


図5 切頭パラメータに対する座屈耐荷力曲線

とし、初期不整を与えた後の1層目のz座標 z'_1 は式(10)および(11)より、

$$\begin{aligned} z'_1 &= R'_{20} - R'_\gamma \\ &= (1 + \epsilon)R_{20} - \gamma(R'_{20} - z_3) \\ &= (1 - \gamma)(1 + \epsilon)R_{20} + \gamma z_3 \end{aligned} \quad (12)$$

と表される。また、1層目の半径 r'_1 は、 $\triangle A'BE$ と $\triangle A'CD$ の相似条件と式(10)より、

$$r'_1 = \frac{R'_\gamma r_3}{R'_{20} - z_3} = \gamma r_3 \quad (13)$$

となる。したがって、新たな座標は、

$$\begin{cases} x'_{i,j} = \gamma r_3 \cos \frac{2\pi(j-1)}{5} \\ y'_{i,j} = \gamma r_3 \sin \frac{2\pi(j-1)}{5} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, 5 \quad (14)$$

となる。このように角頂の一部に初期不整を与えることによって、1層目の座標値も追従して変化するが、その他の節点是不変であることに注意する。

4. 形態解析結果と考察

(1) 形態パラメータと座屈耐荷力の関係

a) 荷重ケースIにおける $\gamma - \lambda$ 曲線

地上のジオデジックドーム構造を想定し鉛直下向きの自重による荷重ケースについて、形態パラメータに対する座屈解析を行なった。切頭パラメータを順次変化させたときの座屈荷重を求め、最終的に図5(a)に示す1次と2次の座屈耐荷力曲線を得た。2次の座屈耐荷力曲線は1次の曲線とほぼ同型の曲線を得た。構造物の耐荷力としては最小座屈荷重が問題となるので、1次座屈荷重に対応する座屈耐荷力曲線が重要となる。こ

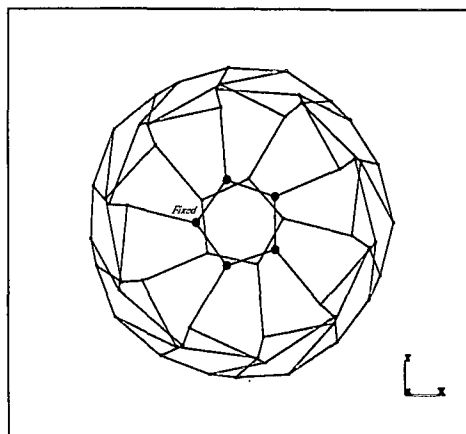


図6 荷重ケースIの座屈変形モード ($\gamma = 0.28$)

の座屈耐荷力曲線に対応する変形モードを図6に示す。この座屈変形モードは C_5 回転対称群を持つ。図5(a)より、 $\gamma = 0.28$ のときに座屈荷重 $\lambda_1 = 2.08 \times 10^{-4} EA$ が最大となる結果を得た。例えば、 $\gamma = 0.1$ あるいは $\gamma = 0.45$ のとき座屈荷重は $0.598 \times 10^{-4} EA$ となり、同一の材料・断面諸量を用いたにもかかわらず、単に切頭パラメータの違いにより構造物の耐荷力に3倍以上の差が生じた。このように、形態パラメータの変化によって耐荷力が大きく異なり、逆に最大の耐荷力を得るための最適な切頭パラメータ $\gamma_{opt} = 0.28$ が存在す

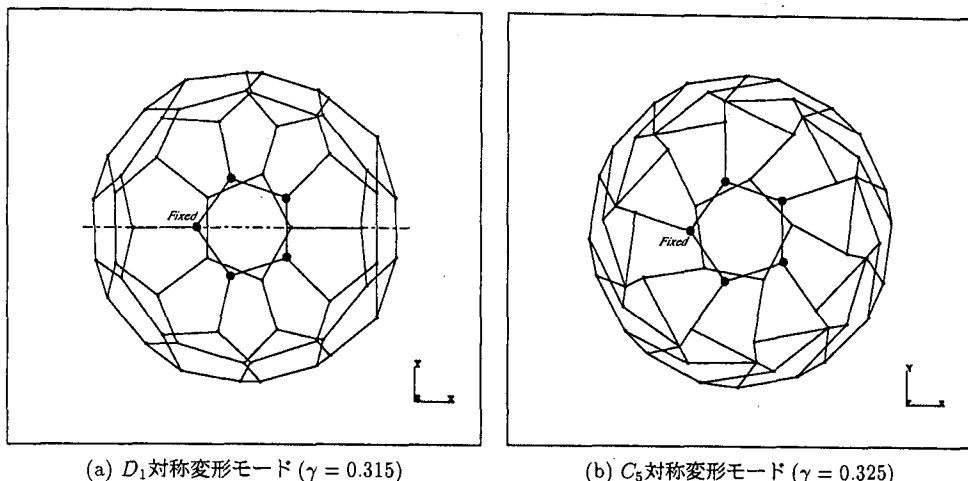


図7 荷重ケースIIにおける最小座屈変形モード

ることが分かった。

b) 荷重ケースIIにおける $\gamma - \lambda$ 曲線

全節点に等価節点等方外力を作用させた荷重ケースについて形態解析を行なった。切頭パラメータに対応する座屈荷重を逐次的に求め、1次と2次の座屈荷重 λ_1, λ_2 を図5(b)にプロットした。この場合、1次と2次の座屈耐荷力が最大となる切頭パラメータは一致せず、両者の耐荷力曲線は $\gamma_{opt} = 0.32$ で交差し、このとき座屈荷重 $\lambda_1 = 3.58 \times 10^{-4} EA$ を得た。図5(b)より、この $\gamma = 0.32$ を境界に、最小座屈荷重に対応する座屈モードが別の座屈モードと入れ替わる、モードスイッチング (Mode-Switching) 現象が発生した。この両者の座屈変形モードを図7に示す。図7(a)は $\gamma \leq 0.32$ における最小座屈荷重時の座屈変形モードであり、 D_1 軸対称群を持つ。この変形モードは5本の軸対称性から残りの4本の軸対称変形モードと不変である。つまり、固有値が5つの重根を持ち、5つの軸対称変形モードが存在することを意味する。また、図7(b)は $\gamma > 0.32$ における最小座屈荷重時の別の固有モードとなり、 C_5 回転対称群を持つ。この荷重ケースは γ によって D_1 軸対称変形と C_5 回転変形に対応するそれぞれの耐荷力曲線が交差する特異なケースである。

いずれの荷重条件においても最適となる切頭パラメータ γ_{opt} が存在する結果が得られた。特に、荷重ケースIIの最適パラメータは、ほぼ C_{60} の形態に一致する。このことは、 C_{60} の構造安定性から切頭二十面体の中で最も球に近い形態である $C_{60}(\gamma = 0.33)$ のとき、座屈荷重が最大となることを裏付ける結果となった。また、荷重ケースIIのような中心に向かう荷重ベクトル作用下では、球に近い構造形態が耐荷力に対して優位な傾

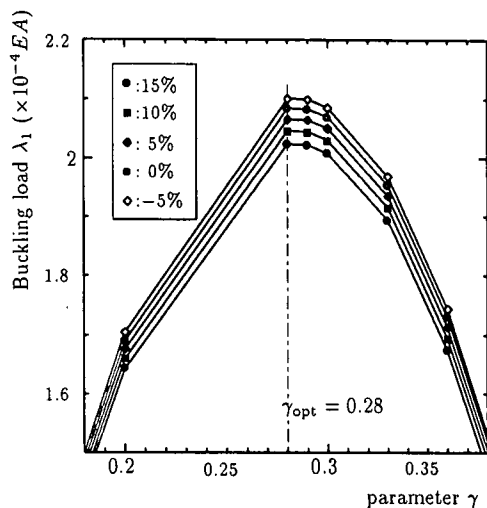
向が得られることが確かめられた。結果的には、このドーム構造物において荷重ケースIが荷重ケースIIより最大耐荷力で0.6倍となり、荷重ケースIの方が構造物に不利な荷重条件となった。

(2) 初期不整による耐荷力の影響

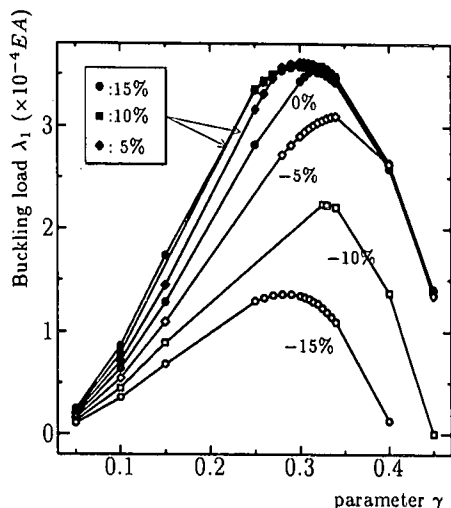
正二十面体トラスの角頂部に初期不整パラメータを与えた上で切頭し、不完全なジオデジックドームの座屈耐荷力を調べる。荷重ケースIと荷重ケースIIのそれぞれについて初期不整パラメータを与え、座屈荷重と切頭パラメータ γ との関係について調べた。

荷重ケースIに初期不整パラメータを与えたときの切頭パラメータと座屈耐荷力の関係を図8(a)に示す。これより、初期不整パラメータを正の方向に+5%, +10%, +15%と増加させると、完全に比べて座屈荷重 λ_1 は低下し、座屈耐荷力曲線もほぼ同型を保った。また、逆に-5%の初期不整を与えると耐荷力が向上した。さらに、初期不整パラメータと最大耐荷力($\gamma = 0.28$)の関係はほぼ線形な関係が確かめられた。

一方、荷重ケースIIにおける初期不整の影響による耐荷力曲線を図8(b)に示す。この場合には初期不整の正負によって耐荷力曲線に大きな差がみられ、特に、負の初期不整パラメータが増加すると、耐荷力が大きく低下した。このとき、耐荷力が最大となる切頭パラメータの値 γ_{opt} も初期不整パラメータ ϵ によって異なる結果となった。また、正の初期不整パラメータでは耐荷力曲線の最大値付近が滑らかとなった。これは初期不整によりモードスイッチングが関わっており、2つのモード間の耐荷力曲線が近接していることを意味する。例えば、初期不整パラメータ+10%以上であれば、 C_5 回転



(a) 荷重ケース I



(b) 荷重ケース II

図 8 初期不整による耐荷力の影響

対称変形モードが最小座屈荷重となる。切頭パラメータ $\gamma = 0.32$ に注目すると、完全系を境目として負の初期不整では耐荷力が $14.3 \times 10^{-4} EA$ ほど低下するが、正の初期不整では耐荷力はほぼ変わらないという結果が得られた。このことにより、このような荷重ケースの場合には負の初期不整による耐荷力低下の影響は大きいことが明らかとなった。回転対称変形モードの耐荷力凸曲線は初期不整にあまり影響せず、この負の初期不整に対して軸対称座屈変形モードの耐荷力が低下することが確認できた。このように、ジオデジックドームのような構造形態は、初期不整を含めた最適な形態パラメータを見つけることも設計では重要である。

5. 結語

本研究では、ジオデジックドームの構造形態に着目し、パラメータ解析によつて切頭パラメータと座屈荷重との関係を明らかにした。2種類の荷重に限定したが、切頭パラメータと座屈荷重との間には極大点を持つ非線形な関係があり、最大耐荷力となる最適な形態パラメータ γ_{opt} が存在するという結果が得られた。特に、荷重ケース II における最適な形態は、安定な構造形態と言われていた C_{60} フラーレン構造の形態とほぼ一致し、構造の安定性を裏付ける結果となった。また、この荷重ケースの最小座屈曲線は、ある形態パラメータから別の対称変形モードに入れ替わるモードスイッチングが発現することが得られた。 C_{60} フラーレン構造のように球に近い骨組構造物の耐荷力が高くなるが、初期不整パラメータ解析によって耐荷力が敏感に変化することが確かめられた。

参考文献

- 1) Marks, R.W. : The Dymaxion World of Buckminster Fuller, Reinhold, New York, 1960.
- 2) Fuller, R.B. : Synergetics, Macmillan, New York, 1975.
- 3) Edmondson, A.C. : A Fuller Explanation, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.
- 4) Kroto, H.W., Heath, J.R., O'Brien, S.C., Curl, R.F. and Smalley, R.E. : C_{60} : Buckminsterfullerene, Nature, 318, 162-3, 1985.
- 5) Chancy, C.C. and O'Brien, M.C.M. : The Jahn-Teller Effect in C_{60} and Other Icosahedral Complexes, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, 1997.
- 6) Murota, K. and Ikeda, K. : Critical imperfection of symmetric structures, SIAM J. Appl. Math., 51(5), pp.1222-1254, 1991.
- 7) Ikeda, K. and Murota, K. : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 86(2), pp.215-243, 1991.
- 8) Ario, I., Ikeda, K. and Murota, K. : Block-diagonalization method for symmetric structures with rotational displacements, Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE, No.489/1-27, pp.27-36, 1994.