

あいまいな作業日数、費用の推定のもとでの工期及び 工費の妥協による工程計画手法FPERT/FCPMの提案

Approximate Optimal Scheduling Procedure, FPERT/FCPM, based on Fuzzy Estimation of Time and Cost

九州大学 ○樗木 武*
 " 辰巳 浩*
 " 曾 浩璽**

By Takeshi CHISHAKI, Hiroshi TATSUMI, and Hao-Hsi TSENG

建設工事において、作業日数や費用は自然条件等により強く影響を受ける事から本来的にあいまいなものであり、或はあいまいな事前情報にならざるをえない。したがって、このことを踏まえたより適切な判断のもとで、工期と工費のトレードオフの関係を考慮した工程・資金計画立案手法の確立が必要である。本研究はこのことに関し、現実の大規模な工事ネットワークに適用可能な実用手法として FPERTとFCPMの親子問題の形式で理論的体系化を図り、またネットワーク分割法、解析モデルの次元縮減化策等の工夫を論じている。加えて、複雑なネットワークに対処するために、作業要素の順序関係データから、ISMまたはFSMを活用したネットワークの作成手法とその際の留意点を検討し、このことをも含めた実務的工程計画手法としてFPERT/FCPMを提案している。さらに提案手法を算例にあてはめて解説すると共に、その妥当性、有用性を明らかにし、また結果の活用に関し考察している。

[キーワード]：工程計画、費用計画、ネットワーク問題、最適化手法

1. はじめに

建設工事における工程や資金の計画・管理、あるいは作業員、建設機材の利用・配置計画等の手法として、従来よりPERT、CPMといったネットワーク手法が広く用いられている^{1)・2)}。本法は、作業要素の順序関係にもとづく工事のながれをネットワークに表し、これをネットワーク理論により解析して工程等の諸計画を立案策定するもので、複雑な工事内容の扱いや適切な工事計画・資金計画を可能にする点で優れた手法である。

しかしながら、上記ネットワーク手法には現実問題として2つの点で大きな課題がある。一つは、基本データである各作業要素の作業日数、作業費用等の推定問題である。従来のPERT、CPMでは、これら

* 工学部建設都市工学科 092-642-3276

** 中国(台湾)、前大学院工学研究科土木工学専攻

に関し点推定あるいは3点見積りによる確率概念が用いられてきた。しかし、同じに見える作業内容でも、現実問題として、多様な地形、地質、気象等の自然条件、地域や時期で異なる作業員の質や勤務状況、日進月歩の技術的進展をみせる作業機械や建設資材等により大きく相違することから、作業日数等の確定的、確率的推定は必ずしも妥当でない。本来的には作業日数等はあいまいなものであり、これをそのままの形で推定することがより実情に即した内容である。あるいは、一步譲って確率推定ができるとしても、そのことは作業内容毎に逐一膨大なデータの蓄積があってはじめて可能であり、時代と共に変化する作業環境や技術革新のもとではそうしたことは事実上困難である。さらに、計画者の判断意識からすれば、確定的、確率的に判断するよりも、あいまいな判断の方がより忠実である。

このように、作業日数等はもともとがあいまいな事前情報であり、あるいは推定そのものがあいまい

である。このことを踏まえるとき、判断を誤らない的確な工事の計画・管理を行うためには、作業日数等の推定内容の特質と計画者の判断意識とをより適切な形で表現し活用する工夫が必要である。

いま一つの課題は、計画・管理に際し互いにトレードオフの関係にある工期と工費の調和が求められることである。従来手法はこの点に関し必ずしも直接的に検討が行われず、PERTでは最短工期を、CPMでは最小工費をと個々に検討するに止まっている。また、こうした個々の検討に対する妥協の図り方について必ずしも明示的に扱うに至っていない。これに対し現実、とり分け工事の期間短縮と建設コストの縮減がより強く叫ばれる昨今の情勢の下では、工期と工費の妥協或は調和の上で最適と思える工事の計画・管理を適切に検討することが要請され、そうした扱いが可能な計画手法の確立が求められている。

上述の2つの課題認識のもとに著者らは、まずはあいまいな作業日数の推定にもとづく工程計画手法を提案し、これをFPERTと名付けた^{3)・4)}。次いで、作業の直接費用および工事に伴う間接費用をあいまいなままに推定するとき、最小費用のもとで工程計画を立案する手法としてFCPMを提案した⁵⁾。その上で、FPERTとFCPMとを統合し、あいまいな作業日数及び作業費用の両推定のもとで、工期と工費のトレード・オフの関係を直接的に考慮するTCTモデルを提案し^{6)・7)}、前述の2つの課題に対処する計画手法を確立したところである。しかしながら、TCTモデルは、この本質から作業日数、作業の開始日及び終了日、作業費用関数の勾配及び標準費用といった多くの内容を未知量として取り扱い、またこれらに関する制約条件式の数極めて多くなることから、これを大規模な工事ネットワークにそのまま適用するには問題があり工夫が求められている。そこで本研究では、TCTモデルに代り、かつ結果的に同じ内容を意味し、また実務に資する工事計画手法の全体システムを組立てるものとして、FPERTとFCPMとを親子問題の形式で組合わさ的に活用する手法FPERT/FCPMを新たに工夫し提案するものである。

2. 建設工事ネットワークの作成について

FPERT/FCPMは、後述のように工事ネットワークに

対し展開される。その意味でネットワーク作成を本法の体系に組み込む必要があるが、その基本は従来からのPERT、CPMに対するものと同じである^{1)・2)}。ただ、これをコンピューター支援の下でより論理的、機械的に行う方法としてISM等の活用と留意点(特にstep3~5)を踏まえ整理すれば次の手順となる。

<Step1> 考えられる作業要素を拾い出し、それらの隣接した前後関係を0-1 関係又はあいまい関係で判断し、作業要素間の隣接関係行列を作成する。その際、基本は直接の隣接のみの表現で事足りるが、間接的な隣接関係が含まれたとしても問題はない。

<Step2> Step1 の隣接行列から可到達行列を算出し、これをもとにISM又はFSMを適用し作業要素間の階層構造図を作成する(ブロック・ダイアグラム)。なお、最初の隣接行列データに間接的關係が紛れ込んでいる場合は、それを直接的関係と誤判断する恐れもある。しかし、ブロック・ダイアグラムは、あくまでも直接的関係を通じて間接的關係が表現される。従って、直接的関係と見えても既にその間で間接的關係が描かれていれば、直接的関係は意味をなさず、この観点で識別あるいは点検し排除すればよい。

<Step3> ブロック・ダイアグラムにおける作業要素に関し、その上位から連携した節点对(i, j)による表現を行う。すなわち、最上位レベルの作業要素について、始点はいずれも0とし、その後続作業要素が異なる毎に異なる終点番号を付す。この終点番号はそのまま次に接続する作業要素の始点番号となるもので、直接的後続の作業要素の始点番号として記入し、終点番号は最上位レベルと同じ考えで割り振り記入する。以下同様にして最下位の作業要素まで全てを節点对で表わすが、最後の終点番号は、そのすぐ上位の作業要素が異なれば同じ番号を、同じであれば異なる番号を与える。

<Step4> Step3の節点对(i, j)にもとづいてアロー・ダイアグラムを作成する。アロー・ダイアグラムは1度のトライアルで見やすいように表現することは難しい。したがって、最初は矢印が交差して複雑になったとしても、とにかく順序関係だけは間違いのないダイアグラムを描く。次いで、できる限り矢印が交差せず見やすくなるように矢印が交差する前後の節点の位置関係を画面上で工夫しながら書き直す。

表-1 作業日数の確定推定及びあいまい推定³⁾

タイプ	内 容	左記内容の定式化
1	「 $t_{i,j}$ が $r_{i,j}$ と確定的に推定できる。」 [$-$, $r_{i,j}$, $-$]	$t_{i,j} = r_{i,j}$
2	「 $t_{i,j}$ は、最低限 $d_{i,j}$ が必要であると考えられるが、 $D_{i,j}$ とすれば間違いないところである。」 「 $t_{i,j}$ は、できれば $D_{i,j}$ で処理することが望ましいが、それ以前に作業が終了する可能性もある。但し、 $d_{i,j}$ 以下になることはないである。」 [$d_{i,j}$, $D_{i,j}$]	$m(t_{i,j}) = 1 - \frac{D_{i,j} - t_{i,j}}{D_{i,j} - d_{i,j}} \geq \lambda_T$ かつ、 $t_{i,j} \leq D_{i,j}$
3	「 $t_{i,j}$ は、できる限り $d_{i,j}$ であることが望まれるが、遅れた場合には最大限 $D_{i,j}$ まで延びうることもあり得る。」 「 $t_{i,j}$ は、最大限 $D_{i,j}$ と考えられるが、基本的には $d_{i,j}$ で終了する公算が大きい。」 [$d_{i,j}$, $D_{i,j}$]	$m(t_{i,j}) = 1 - \frac{t_{i,j} - d_{i,j}}{D_{i,j} - d_{i,j}} \geq \lambda_T$ かつ、 $t_{i,j} \geq d_{i,j}$
4	「 $t_{i,j}$ は、できる限り $r'_{i,j} \sim \bar{r}_{i,j}$ であることが望まれるが、いくら急いでも $d_{i,j}$ までであり、また逆に遅れても $D_{i,j}$ までに限られる。」 「 $t_{i,j}$ は、最大 $D_{i,j}$ で、かつ最小限 $d_{i,j}$ であり、基本的にはその中間の $r'_{i,j} \sim \bar{r}_{i,j}$ になる公算が大きい。」 [$d_{i,j}$, $\langle r'_{i,j}, \bar{r}_{i,j} \rangle$, $D_{i,j}$]	$m(t_{i,j}) = 1 - \frac{\bar{r}_{i,j} - t_{i,j}}{\bar{r}_{i,j} - d_{i,j}} \geq \lambda_T$ かつ、 $m(t_{i,j}) = 1 - \frac{t_{i,j} - r'_{i,j}}{D_{i,j} - r'_{i,j}} \geq \lambda_T$

注) $m(t_{i,j})$: メンバーシップ関数。 $0 \leq \lambda_T \leq 1$ 。

<Step5> 上記アロー・ダイアグラムは、Step1のデータ作成と関係して、実線で与えられる実体的作業要素とそれらの直接的前後関係は比較の見落すことなく表現できている。しかし、場合によっては見落すこともありえ、そのことに対処するにはStep 4の作図後にそのことを点検しながら図を修正すると共に、データシートに加筆する。また、いわゆるダミー作業で表現される複雑な前後関係は、データシートの作成時から完全に拾い出しきれているという保障はない。したがって、えられたアロー・ダイアグラムを点検し、ダミー関係による前後関係が考えられればこれを図上に追加記入する。さらに、最下位の作業要素の終点が複数に分れる場合は、ネットワークの意味が変わらないように注意しながらダミー作業を加えて、全作業の完了節点が1つの節点 n で表現できるように工夫する。

以上の作業を行えば、終局的に工事の開始点を0、完了点を n とする工事ネットワークがえられ、これがFPERT/FCPM適用のための工事ネットワークとなる。

3. 作業日数及び作業費用の推定について

先のFPERT³⁾で提案するように、ネットワークを構成する作業要素 (i, j) の作業日数 $t_{i,j}$ は、確定的に推定できる場合(タイプ 1)とあいまいな形で推定せ

ざるをえない場合(以下、単にあいまい推定という)とがある。その中であいまい推定となるものについては、多様な内容が考えられるが、現場判断の実情に関するヒアリングを踏まえれば、結局は表-1に示すタイプ2~4の3通りが現実のものである³⁾。そして、これらに関するあいまいさの表現として直線のメンバーシップ関数を仮定すれば、同表の最右欄に定式化するとおりであり、作業に関し安全を見込んでより確実に実行することは式中の λ_T を極力1.0に近づけることであると解釈できる。

作業費用についても同様に考察できる。すなわち、作業要素 (i, j) の費用関数 $c_{i,j}$ が次の線形式で与えられるものとする。

$$c_{i,j} = a_{i,j}(t_{i,j}^E - t_{i,j}) + b_{i,j} \quad (1)$$

ここに、 $t_{i,j}$: 作業 (i, j) の計画作業日数、 $t_{i,j}^E$: (i, j) を無理をせず、費用的に最適と推定される通常の場合の作業日数、 $a_{i,j}$: 費用勾配で、 (i, j) の作業日数を1日短縮するに必要な追加費用、

$b_{i,j}$: $t_{i,j} = t_{i,j}^E$ の場合の作業費用(標準作業費用)。また、間接費 c_0 が工期 $S_{n,n+1}^E$ に比例すると考えれば

$$c_0 = a_0 S_{n,n+1}^E + b_0 \quad (2)$$

ここに、 a_0 : 間接費の工期比例成分における1日当りの費用(費用勾配)、 b_0 : 固定費用。

$a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ 、 a_0 及び b_0 は確定的あるいはあいまいな内容で推定されるものであるが、これらの推定内容も基本的に $t_{i,j}$ に同じである。すなわち、表-1に

において、 $t_{i,j}$ の代りに $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ 、 a_0 、 b_0 を、 $\tau_{i,j}$ の代りに $\alpha_{i,j}$ 、 $\beta_{i,j}$ 、 α_0 、 β_0 を、 $(D_{i,j}, d_{i,j})$ の代りに $(E_{i,j}, e_{i,j})$ 、 $(F_{i,j}, f_{i,j})$ 、 (E_0, e_0) 、 (F_0, f_0) を定義し、また、 λ_τ を λ_c に書き改めれば、これらが $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ 、 a_0 、 b_0 の確定推定及びあいまい推定の4タイプとなる。

ここで問題は、 $t_{i,j}^*$ と $t_{i,j}$ の推定に関する内容との関係である。表-1より明らかなように、タイプ1は、短縮の可能性がないという厳格な意味をも含めた確定的作業日数の推定であると解釈でき、もし短縮が可能であればタイプ2又は4で表現されるべきものである。したがって、 $t_{i,j}^* = \tau_{i,j}$ とすることで問題はない。タイプ2～4については、CPMの考えを踏襲すれば全く無理をしない最大作業日数が $D_{i,j}$ であり、 $d_{i,j}$ が可能な短縮限界日数であると考えることができる。したがって、 $t_{i,j}^* = D_{i,j}$ と近似でき、このとき作業日数、作業費用およびそれらに關係するメンバーシップ関数の相互の關係を例示すれば図-1のとおりである。作業費用 $c_{i,j}$ のあいまい推定の範囲(図中の網かけ部分)が $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ 及び $t_{i,j}$ の3者の複合により広い範囲にわたることが理解できる。

4. FPERT/FCPMモデルの構築

工期と工費の妥協の上での最適な工程計画および資金計画を作成することが終局的に要求される内容である。これに対して、先に示したTCTモデルでは、この内容をネットワーク日数の最小化及び全工事費の最小化を基本目的とする多目的問題によって直接的に定式化している^{3), 7)}。しかも、本モデルでは、工費の関数が未知量の2次式になることに加えて、解くべき連立方程式の次元が極めて大きくなり、大規模ネットワークにそのまま適用することが困難で実用的でないという問題がある。そこでここでは、終局的にはTCTモデルと同じ内容の工程及び資金計画が得られるものの、その理論を異にして、FPERT³⁾、FCPMモデル⁵⁾に修正を加えながら両モデルの組合せ活用を内容とするFPERT/FCPMモデルを新たに工夫し提案するものである。

まず工期について考えれば、作業日数の最小限の確信度 $\lambda_\tau = \lambda_{\tau_0} \in [0, 1]$ の値のもとでFPERTの最早プラン・モデルを作成するが、その原型が次のように定式化できる。

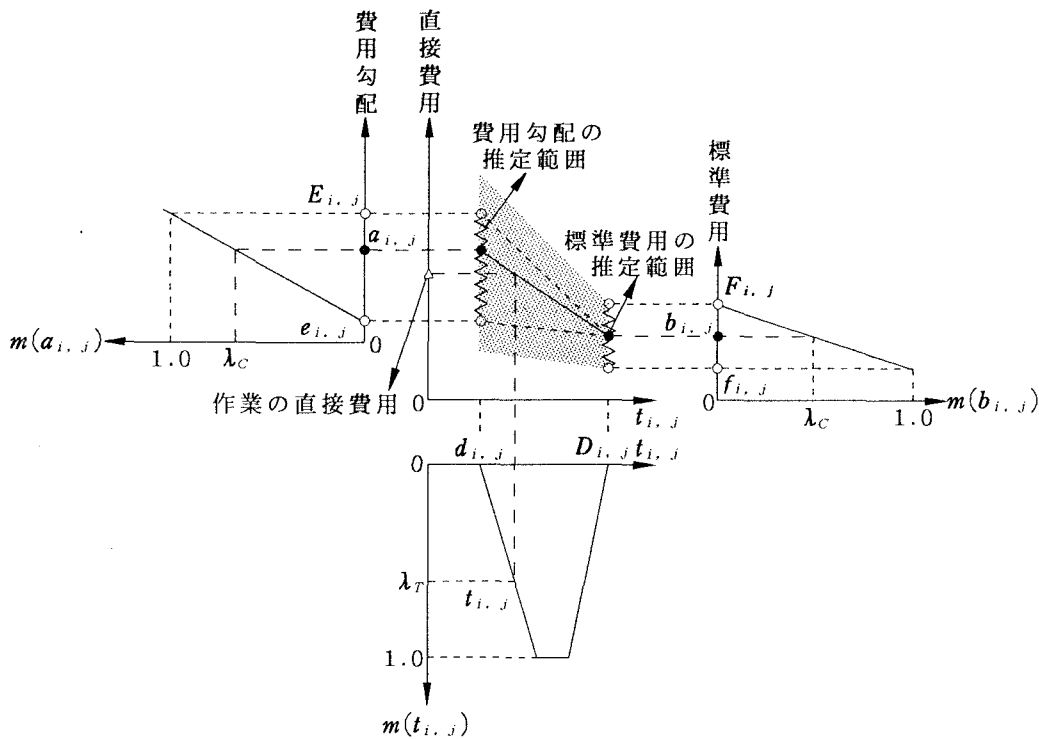


図-1 あいまい推定における作業日数と作業費用との関係

$$\text{Minimize } T = \sum_{(i,j) \in W} (S_{i,j} + F_{i,j}),$$

subject to

- 1) $S_{0,j} = 0$ ($j \in u_0$ の全てに対し工事開始日の0設定)、
- 2) $(i,j) \in W$ の全てに対して、 $\lambda_T = \lambda_{T_0}$ のもとで推定タイプに合わせた $t_{i,j}$ の推定式(表-1)。ただし、 $t_{i,j} = F_{i,j} - S_{i,j}$ なる関係を代入。
- 3) 節点 j に属する先行作業 (i,j) と後続作業 (j,k) のペア全てに対する順序関係の定義 $F_{i,j} \leq S_{j,k}$ ($j \in P$ の全て。ただし、 $j=0$ は除かれる)。
- 4) $S_{i,j} \geq 0, F_{i,j} \geq 0$ ($(i,j) \in W$ の全て)。

ここに、 W =作業要素 (i,j) の全体集合、 P =節点 j の全体集合 $(0 \sim n)$ 、 u_0 =工事開始日を始点とする作業要素 $(0,j)$ の集合、 $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ =作業要素 (i,j) の作業開始日、終了日。

(3)

上式は、 $S_{i,j}$ および $F_{i,j}$ を未知量とし、また、条件2)は各作業要素に対して1ないし2個の、条件3)は各節点に結合する作業要素の前後ペアの数の方程式となる。したがって、TCTモデルほど複雑ではないが、それにしてもこのままでは大規模なネットワークを扱うことはできない。しかし、幸いなことに対象ネットワークは工事開始日から完了日へと一方向に向いた矢印の集合体であり、逆方向や往復路、循環路は含まれていない。この点を踏まえると、ネットワークに適当な完全切断線を入れ、計算機の容量に応じた幾つかに分割し計算することが可能である。

例えば図-3の(3)に示するように、ネットワークを図中太点線で示すように完全切断するとする。このとき、各分割ネットワークの開始日はその直前の分割ネットワークの対応する節点毎の最遅作業終了日で与えられる。また、各分割ネットワークの完了点側が複数となる場合は、§2のStep5と同様に、ネットワークの意味を変えないように適当にダミー作業を入れながら分割ブロックの作業完了点を1つにする。結局、本例の分割ネットワークの各々が図-3(4)のように与えられる。そこで、工事の開始点側を含む最初の分割ネットワークに式(3)を適用して解き、次いでこの分割ネットワークの完了点側の作業要素の終点から、次の分割ネットワークの工事開始点に関し開始日を既知のものとして図中点線のように受

け渡ししながら式(3)を適用し解析する。以下、本操作を節点0側の分割ネットワークから節点 n 側の分割ネットワークまで順次進めれば、FPERTの最早プランが得られることとなる。

ネットワークの分割だけでも十分であるが、式(3)の等式条件、すなわち、条件1)と条件2)においてタイプ1(ダミー作業を含めて)で与えられる条件から $F_{i,j}$ 、 $S_{i,j}$ の一部が消去できる。また、条件2)に含まれる未知変数の下界条件は、スラック変数を導入するだけで条件式から削除でき、方程式の数を少なくする事ができる。したがって、実際の解析モデルがより簡略化できる。なお、当然のことながら工期は次の様に算出される。

$$S_{n,n+1}^E = \max(\forall F_{k,n}^E \in v_n) \quad (4)$$

ここに、 v_n =工事完了点 n と結びつく作業要素 (k,n) の集合。

FPERTの最遅プランについても同様に解くことができる。すなわち、本モデルは次式で定義される。

$$\text{Maximize } T = \sum_{(i,j) \in W} (S_{i,j} + F_{i,j}),$$

subject to

- 1) $F_{k,n} = S_{n,n+1}^E$ ($k \in v_n$ の全てに対し工事完了日の設定)
- 2) $(i,j) \in W$ の全てに対して、 $\lambda_T = \lambda_{T_0}$ のもとで推定タイプに合わせた $t_{i,j}$ の推定式(表-1)。ただし、 $t_{i,j} = F_{i,j} - S_{i,j}$ なる関係を代入。
- 3) 節点 j に属する先行作業 (i,j) と後続作業 (j,k) のペアの全てに対する順序関係の定義 $F_{i,j} \leq S_{j,k}$ ($j \in P$ の全て。ただし、 $j=0$ は除かれる)。
- 4) $S_{i,j} \geq 0, F_{i,j} \geq 0$ ($(i,j) \in W$ の全て)。

(5)

最早プランと同じ分割ネットワークに対し、工事完了点 n 側から、切断面で完了点の完了日を既知として受け渡ししながら工事開始点0側までの分割ネットワークについて式(5)を後退的に適用すれば、前述の最早プランに対する最遅プランが得られる。

なお実際は、 λ_{T_0} 及び最早プランのもとでの $F_{i,j} - S_{i,j}$ により $t_{i,j}$ が得られているから、工期 $S_{n,n+1}^E$ と $t_{i,j}$ を用いて、労をいとわなければ通常のPERTと同様の図解計算により最遅プランの $F_{i,j}$ 、 $S_{i,j}$ を求めることができる。

次に、FPERTにより得られた工期 $S_{n,n+1}^E$ のもとで

FCPMの適用 (FPERT内FCPM) を考える。すなわち、FPERTのクリティカル・パス上の作業要素については、 λ_{τ_0} のもとでこれ以上の作業日数の拡大は不可能であるが、クリティカル・パス以外の作業要素は余裕日数をもつことから、工費をより安くするという観点でさらに計画を詰める余地がある。

作業費用の推定に関する諸パラメータの推定確信度 λ_c ($[0, 1]$ の値)を設定し ($\lambda_c = \lambda_{c_0}$)、また先に求めたFPERTの λ_{τ_0} 、 $S_{n,n+1}^E$ のもとでFCPMモデルの適用を考える (以下、この意味で本モデルをFPERT内FCPMモデルという)。すなわち、本来の目的関数は作業要素にかかわる直接費と間接費の合計を最小にすることである。しかし、FPERTのもとでのFCPMの適用であるから、工期 $S_{n,n+1}^E$ が先決されており、したがって、間接費は a_0 、 b_0 が決まれば直ちに算出できることになる。 a_0 、 b_0 の推定は、目的関数の加法的性及びこれらに関する制約条件に他の変数が含まれないことから $a_{i,j}$ 等と独立に行うことができ、しかも目的関数に照せば $a_0 S_{n,n+1}^E + b_0$ を最小にすることである。これらのことを踏まえれば、結局は $\lambda_c = \lambda_{c_0}$ のもとで、 a_0 、 b_0 としてそれらがとり得る値の最小値に定めればよいことになり、わざわざ計算するまでもなく、 a_0 、 b_0 に関するあいまい推定の定義式から直ちに求めることができる。

また、直接費用を最小にすることは $F_{i,j} - S_{i,j}$ を極力大きくすることであり、そのためには、FPERTの $S_{n,n+1}^E$ 、 λ_{τ_0} 及びクリティカル・パスのもとで $F_{i,j}$ をできる限り大きくし、 $S_{i,j}$ をできる限り小さくすることである。

以上から、終局的にFPERTの子問題としてのFPERT内FCPMの最早プランが次のように定式化できる。

$$\text{Minimize } C = \sum_{(i,j) \in W} [a_{i,j} \{t_{i,j}^E - (F_{i,j} - S_{i,j})\} + b_{i,j}],$$

subject to

- 1) $S_{0,j} = 0$ ($j \in u_0$ の全てに対して工事開始日の0設定)。
- 2) $F_{k,n} = S_{n,n+1}^E$ ($k \in v_n$ の全てに対して工期 $S_{n,n+1}^E$ による工事完了日の設定)。
- 3) $(i,j) \in W$ の全てに対して、 $\lambda_{\tau} = \lambda_{\tau_0}$ のもとで推定タイプに合わせた $t_{i,j}$ の推定式(表-1)。
ただし、 $t_{i,j} = F_{i,j} - S_{i,j}$ なる関係を代入。

- 4) 節点 j に属する先行作業 (i,j) と後続作業 (j,k) のペアの全てに対する順序関係の定義 $F_{i,j} \leq S_{j,k}$ ($j \in P$ の全て。ただし、 $j=0$ は除かれる)。
- 5) $(i,j) \in W$ の全てに対して、 $\lambda_c = \lambda_{c_0}$ のもとで推定タイプに合わせた $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ の推定式。
ただし、 $t_{i,j}^E = \tau_{i,j}$ (タイプ1のとき)または $t_{i,j}^E = D_{i,j}$ (タイプ2~4のとき)、及び $t_{i,j} = F_{i,j} - S_{i,j}$ を代入。
- 6) $S_{i,j} \geq 0$, $F_{i,j} \geq 0$, $a_{i,j} \geq 0$ (内容により負とすることもある), $b_{i,j} \geq 0$ ($(i,j) \in W$ の全て)。

(6)

実際問題として、FPERTで述べた分割ネットワークをそのまま用いて式 (6)を適用することができる。すなわち、開始節点0側から順次、分割ネットワークの完了日を次の分割ネットワークの開始日として受け渡ししながら、式 (6)のモデルを適用し演算を繰り返せばよい。その際、

- a. 条件1)、2)を用いてモデル内容の圧縮を図る、
- b. FPERTによるクリティカル・パスに直結する作業要素に関し、その開始点について、クリティカル・パスから必然的に定められる既知の内容を代入しモデルを圧縮する、

といった工夫がある。また、FPERTによるクリティカル・パス上の作業要素、ダミー作業及び $t_{i,j}$ がタイプ1となる作業要素に関しては、理論上以下のように個々に検討できるので式 (6)のモデルから除外される。

- c. FPERTによりえられたクリティカル・パス上の $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ が固定されることから、これらは既知として処理される。また、本クリティカル・パス上の各作業要素の $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ は、コスト最小の目的からして $\lambda_c = \lambda_{c_0}$ のもとでこれらが取り得る範囲の値のうちの最小値に設定すればよい。
- d. ダミー作業については、当然ながら、 $a_{i,j} = 0$ 、 $b_{i,j} = 0$ であり、また、 $S_{i,j} = \max(\forall F_{k,i} \in v_k)$ 、 $F_{i,j} = S_{i,j}$ である。
- e. 条件3)で、 $t_{i,j}$ がタイプ1で与えられる場合には、 $a_{i,j}$ の情報は不必要である。また、 $b_{i,j}$ に関しては、 $\lambda_c = \lambda_{c_0}$ のもとで取り得る範囲の値のうちの最小値に設定すればよい。さらに、 $S_{i,j} = \max(\forall F_{k,i} \in v_k)$ 、 $F_{i,j} = S_{i,j} + \tau_{i,j}$ である。
- f. 条件3)、5)の下界条件のスラック変数による処理。

以上の措置を行うとき、FPERTに比してさらに $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ に関する推定が条件に追加される式(6)のモデルであるが、ネットワークの同じ分割に対して概ねFPERTモデルと同様の次数にまで機械的に圧縮でき、演算上極めて好都合となる。

式(6)に関し、いま1つの演算上の工夫は、目的関数が非線形になることへの措置である。すなわち、一般に $a_{i,j}$ 及び $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ が未知量であることから、目的関数の第1項は未知量の2次式となる。これに対し、式(6)の適用は、その前段階としてFPERTから得られる $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ をベースに、所与の工期 $S_{n,n+1}^0$ のもとでさらなる工費の縮減を図るものである。また、目的関数以外の制約条件式はいずれも線形式である。これら両者を考え合わせると、まずは目的関数にのみ近似的にFPERTから得られる $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ の値を仮定して代入の上線形化し、線形計画法を適用する。次いで、これで得られた $a_{i,j}$ の値を仮定して式(6)の目的関数を線形化して解く。以下、これら両計算を繰り返せば $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ 及び $a_{i,j}$ がそれぞれある値に収束するが、その結果が求める式(6)の解である。なお、FPERTのもとでのFCPMの適用であることから、このような試行錯誤は少ない回数で済み、試みた算例ではいずれも3、4回の繰り返しで済んだ。

FPERT内FCPMの最速プラン・モデルは、式(6)において、条件1)を除くことで直ちに得られる。さらに、モデルの簡略化に関する留意点のうち、b)に関しては「開始点」を「終了点」に書き直せばよい。また、d)については、 $S_{i,j}$ 、 $F_{i,j}$ に関する記述を $F_{i,j} = \min(\forall S_{j,k} \in u_j)$ 、 $S_{i,j} = F_{i,j}$ とし、e)に関しては、 $F_{i,j} = \min(\forall S_{j,k} \in u_j)$ 、 $S_{i,j} = F_{i,j} - t_{i,j}$ とすればよいこととなる。あるいは労をいとわなければ、 λ_r 、 λ_c を λ_{r0} 、 λ_{c0} に固定すれば $t_{i,j}$ 、 $a_{i,j}$ 、 $b_{i,j}$ が最早プランに同じであるから、工事完了点側から後退的に図解しながら計算することも可能である。

5. FPERT/FCPMの手順

建設工事における実際の計画に関し、工期と工費は契約内容によりその上限が与えられ、その範囲で適切に定められなければならない。一方、前章で述べたFPERT/FCPMモデルでは、工事の工期はFPERTによる λ_r の値によって、工費はFCPMによる λ_c の値によ

って制御されるが、 λ_r 、 λ_c はまた工期、工費に関する確信度とも解釈できる。 λ_r 、 λ_c が小さいと、その工期、工費で工事を計画したとしても極めてあいまいで実現性に無理があるといえ、 λ_r 、 λ_c がある程度大きな値をもつことが望ましい。しかし、 λ_r 、 λ_c が大きくなれば、上限と考えられる契約上の工期、工費で納まらないこともあり得る。したがって、工期、工費の上限と、 λ_r 、 λ_c の値とを総合的に判断して実際の工事計画が妥協的に策定されるといえ、こうした判断は決定主体による意志決定問題である。

上述のことを考えると、結局、FPERT/FCPMに要求されることは、工期、工費、 λ_r 、 λ_c の相互の関係を明らかにし、意志決定者に有用な情報を提供することである。その意味でFPERT/FCPMの計算を考えれば、種々の λ_r 、 λ_c と工期、工費との関係を整理し、それぞれに対する工事計画を明らかにしておくことこそが求められるところといえる。すなわち、この点を踏まえ、かつ前章までに述べるモデルの内容と演算上の工夫を含めて、全体的なFPERT/FCPMの計算手順を示せば以下のとおりである(図-2)。

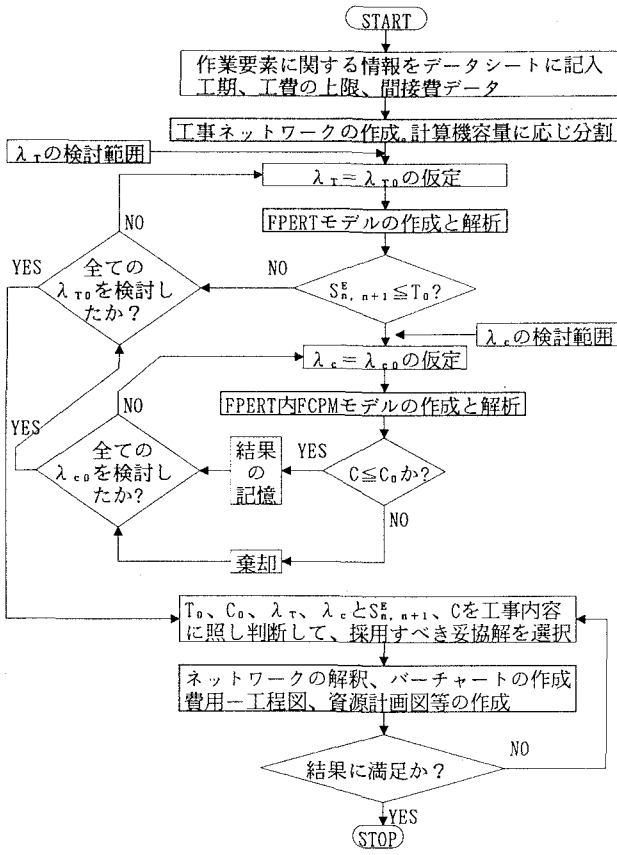


図-2 FPERT/FCPMの計算手順

<手順1> 作業要素に関する情報を収集する。作業要素に関する情報として必要なものは、作業日数、作業費用及び順序関係であり、そのデータシートを例示すれば表-2のとおりである。また、契約にもとづく工期、工費の上限、 λ_T 、 λ_c の検討範囲を所与のものとして定める。

<手順2> §2に述べる方法で工事ネットワークを作成し、その上で計算機の容量を踏まえて工事ネットワーク上に幾つかの分割線（完全切断線による）を描き、各分割ネットワークを作成する。

<手順3> $\lambda_T = \lambda_{T0}$ を設定し、FPERT(式(3)、(5))を適用する。

<手順4> λ_c の検討範囲で繰り返し $\lambda_c = \lambda_{c0}$ を設定しながら（手順3によりえられた工期および $\lambda_T = \lambda_{T0}$ のもとで）FPERT内FCPM（式(6)及びその最遅プランモデル）を適用する。また、必要に応じて工事ネットワークに関する演算結果を整理し、これらを補助記憶装置に記憶させる。

<手順5> λ_T の検討範囲で、種々の λ_T の値に対する検討を終えたならば計算を終了し、そうでないならば手順3に戻る。

当然のことながら、工期、工費の上限並びに λ_T 、 λ_c と工期、工費との関係から計画で採用すべき λ_T 、 λ_c を判断すれば、手順4の記録から当該工事ネットワークの詳細な演算結果を取り出すことができる。そして、これより最早プラン、最遅プラン、クリティカル・パス、バーチャート、資金計画図等の詳細な内容を明らかにすることができる。

6. 計算例

一例として、表-2のように作業要素に関する諸データが得られているものとする。このとき、作業要素間の隣接行列が表-3のようにえられ、これより可到達行列が算定できる。そこで、可到達行列にISM手法を適用して工事内容のブロック・ダイアグラムを作成すれば図-3(1)のとおりである。また、これにもとづいてアロー・ダイアグラムを作成し(図-3(2)、(3))、仮に図中太点線で2つに分割するものとするれば同図(4)の分割ネットワークがえられる。

$\lambda_T = 0.4$ のもとで分割ネットワークのそれぞれに対して式(5)のFPERTモデルを適用すれば、次式が得られる。

分割Ⅰモデル

$$\begin{aligned} \text{Minimize } T_I &= F_{0,1} + F_{0,2} + F_{1,3} + F_{2,3} + F_{2,4} \\ &\quad + S_{1,3} + S_{2,3} + S_{2,4}, \\ \text{subject to} \\ 3 \leq F_{0,1} &\leq 7.8, \quad 7 \leq F_{0,2} \leq 10, \\ F_{0,1} \leq S_{1,3}, \quad &3.8 \leq F_{1,3} - S_{1,3} \leq 10.8, \\ F_{0,2} \leq S_{2,3}, \quad &F_{2,3} - S_{2,3} = 4, \\ F_{0,2} \leq S_{2,4}, \quad &17 \leq F_{2,4} - S_{2,4} \leq 18.8, \\ &\text{and non-negative conditions.} \end{aligned}$$

分割Ⅰ演算後の分割Ⅱモデル

$$\begin{aligned} \text{Minimize } T_{II} &= F_{3,5} + F_{3,6} + F_{4,5} + F_{5,6} + S_{4,5} + S_{5,6}, \\ \text{subject to} \\ 18 \leq F_{3,5} &\leq 22.8, \quad 30 \leq F_{3,6} \leq 36, \\ 31.2 \leq F_{4,5} &\leq 33, \\ 6 \leq F_{5,6} - S_{5,6} &\leq 9.6, \\ F_{3,5} \leq S_{5,6}, \quad &F_{4,5} \leq S_{5,6}, \\ &\text{and non-negative conditions.} \end{aligned}$$

表-2 作業要素に関するデータシート

作業	先行	後続	作業時間の推定 $t_{i,j}$						費用勾配の推定 $a_{i,j}$						標準費用の推定 $b_{i,j}$					
			$t_{y,d}$	$t_{i,j}$	$\tau_{i,j}$	$\tau_{i,j}$	$\tau_{i,j}$	$D_{i,j}$	$t_{y,e}$	$e_{i,j}$	$\alpha_{i,j}$	$\alpha_{i,j}$	$\alpha_{i,j}$	$E_{i,j}$	$t_{y,f}$	$f_{i,j}$	$\beta_{i,j}$	$\beta_{i,j}$	$\beta_{i,j}$	$F_{i,j}$
A		F	3	3	-	-	-	6	2	2	-	-	-	3	2	1	-	-	-	2
B	E	C, D	1	-	-	-	4	-	3	4	-	-	-	-	3	4	-	-	-	8
C	F, B	I	3	7	-	-	-	15	2	3	-	-	-	5	4	3	6	-	6	9
D	F, B		2	15	-	-	-	25	2	1	-	-	-	3	2	15	-	-	-	20
E		B, J	2	5	-	-	-	10	2	8	-	-	-	10	2	10	-	-	-	15
F	A	C, D, I	4	3	5	-	8	10	3	2	-	-	-	7	3	7	-	-	-	10
G	J		1	-	-	5	-	-	2	4	-	-	-	-	2	4	-	-	-	7
H	J	I	2	6	-	-	-	9	3	2	-	-	-	3	1	-	-	7	-	-
I	H, C		3	6	-	-	-	12	2	2	-	-	-	6	3	7	-	-	-	8
J	E	G, H	3	17	-	-	-	20	2	3	-	-	-	5	4	3	5	-	6	8

注1) 作業B, Gの $a_{i,j}$ の空白は、 $t_{i,j}$ がタイプ1で無意味であることによる。
 注2) 作業Fの後続作業Iは、Fとは間接的な関係であるが、含まれても問題ない事例としてあえて挿入。

表-3 隣接行列

iはjに先行するか: YES=1, NO=0
(=jはiに後続するか)

i \ j	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
B	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.
C	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
D	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
E	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1
F	.	.	1	1	.	1	.	.	1	.
G	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
H	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
I	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
J	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1

注) .は0を意味する。また、対角要素は機械的に1とする。

次に、上記FPERT及び $\lambda_c = 0.5$ のもとで式(6)のモデルを求めれば以下のとおりである。

分割Iモデル

$$\text{Minimize } C_1 = a_{0,1}(6 - F_{0,1}) + b_{0,1} + a_{1,3}\{10 - (F_{1,3} - S_{1,3})\} + b_{1,3},$$

subject to

$$\begin{aligned} 3 \leq F_{0,1} \leq 7.8, \quad 2.5 \leq a_{0,1} \leq 3, \\ 1.5 \leq b_{0,1} \leq 2, \\ F_{0,i} \leq S_{1,3}, \quad 3.8 \leq F_{1,3} - S_{1,3} \leq 10.8, \\ 2 \leq a_{1,3} \leq 4.5, \quad 7 \leq b_{1,3} \leq 8.5, \end{aligned}$$

and non-negative conditions.

分割I演算後の分割IIモデル

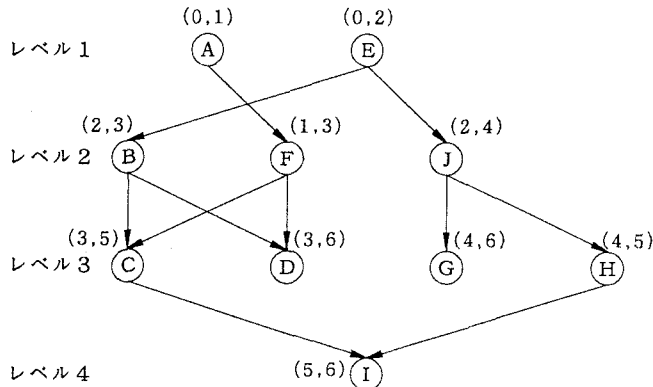
$$\text{Minimize } C_2 = a_{3,5}\{15 - (F_{3,5} - S_{3,5})\} + b_{3,5} + a_{3,6}\{25 - (F_{3,6} - S_{3,6})\} + b_{3,6},$$

subject to

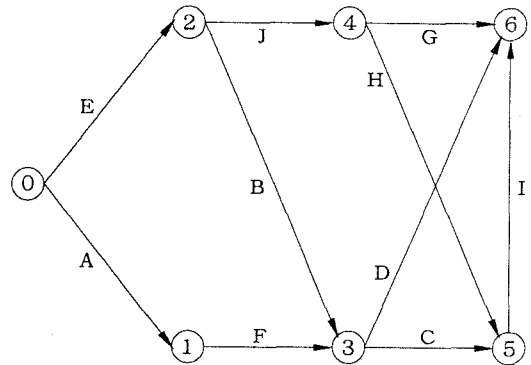
$$\begin{aligned} S_{3,6} = 14, \quad 7 \leq F_{3,5} - S_{3,5} \leq 11.8, \\ 4 \leq a_{3,5} \leq 5, \quad 4.5 \leq b_{3,5} \leq 7.5, \\ S_{3,6} = 14, \quad 19 \leq F_{3,6} - S_{3,6} \leq 25, \\ 2 \leq a_{3,6} \leq 3, \quad 17.5 \leq b_{3,6} \leq 20, \end{aligned}$$

and non-negative conditions.

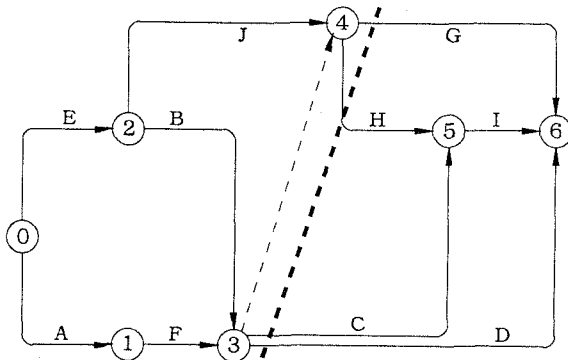
(1) ブロックダイアグラム作成と始終点番号による表示



(2) アロー・ダイアグラムへの変換



(3) 上記(2)の書き直しと前後関係の点検(ダミー作業の加筆)



(4) ネットワークの分割

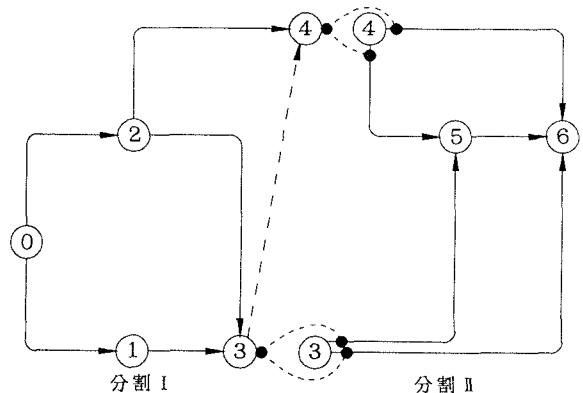


図-3 例題におけるネットワークの作成と分割

先に、同じ本例に対しTCTモデルを適用した⁸⁾。その際は101個の条件と4つの目的関数及び非負条件で与えられる非線形計画モデルとなった。これに比べ上式が極めて簡単であることが理解できよう。

§5の手順に従い上記FPERT及びFPERT内FCPMを計算し、その結果とこれらにもとづく最遅プランを図-4に示す。共に工期は37.2であるが、前者では、図中太線で示す1本のクリティカルパスが形成される(FPERTクリティカル)。また後者では、FPERTクリティカルの他にFCPMの適用に関連した新たなクリティカルパス(FCPMクリティカル)が追加される。

図-5はFPERTの結果に関して、FPERT内FCPMでえられた a_{ij} 、 b_{ij} を仮定して各作業要素毎の直接費用を計算し、これを工程計画に沿って累積したものと、FPERT内FCPMのそれとを比較したものである。当然ながら、FPERTの総直接費用は大きく、また日程途中における最遅プランと最早プランとの費用の乖離が大きい。これに対し、FPERT内FCPMでは総直接費用が最終的に23%減少し、また、日程途中の最早プランと最遅プランとの費用の乖離も小さくなる。

図-6は、 $\lambda_c=0.5$ のもとで λ_r を変化させながら λ_r 、総直接費用及び工期の3者をプロットしたものである。 λ_r が小さいとき、したがって工期が短いときは、総直接費用に関しFPERTとFPERT内FCPMとで大きな乖離がある。しかし、 λ_r が大きくなって工期が長くな

るに従い両者の乖離は小さく、 λ_r の値を1に近づけることが可能となる。すなわち、 λ_r が1に近い、ま

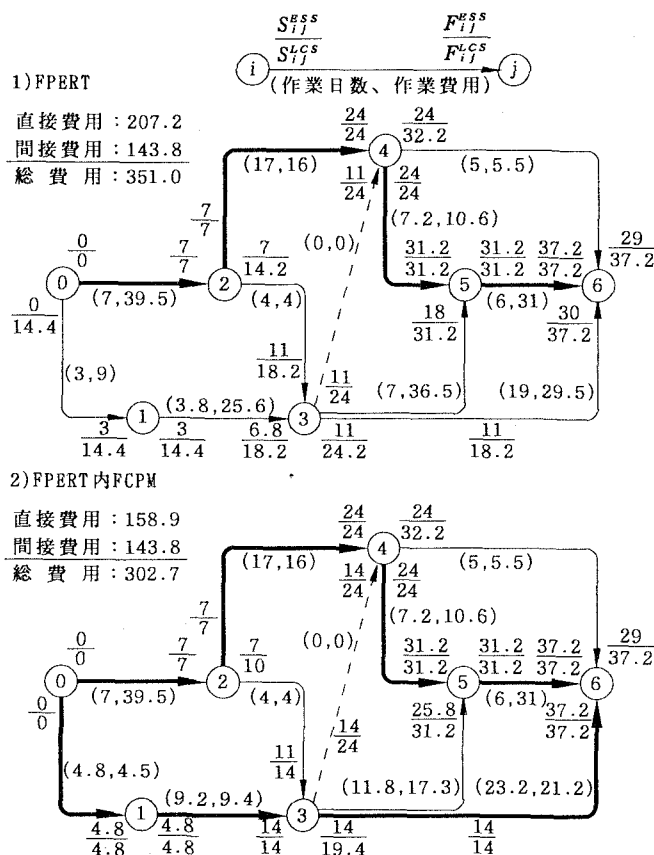


図-4 FP PERTとFP PERT内FCPMモデルの解析結果
($\lambda_r=0.4$ 、 $\lambda_c=0.5$)

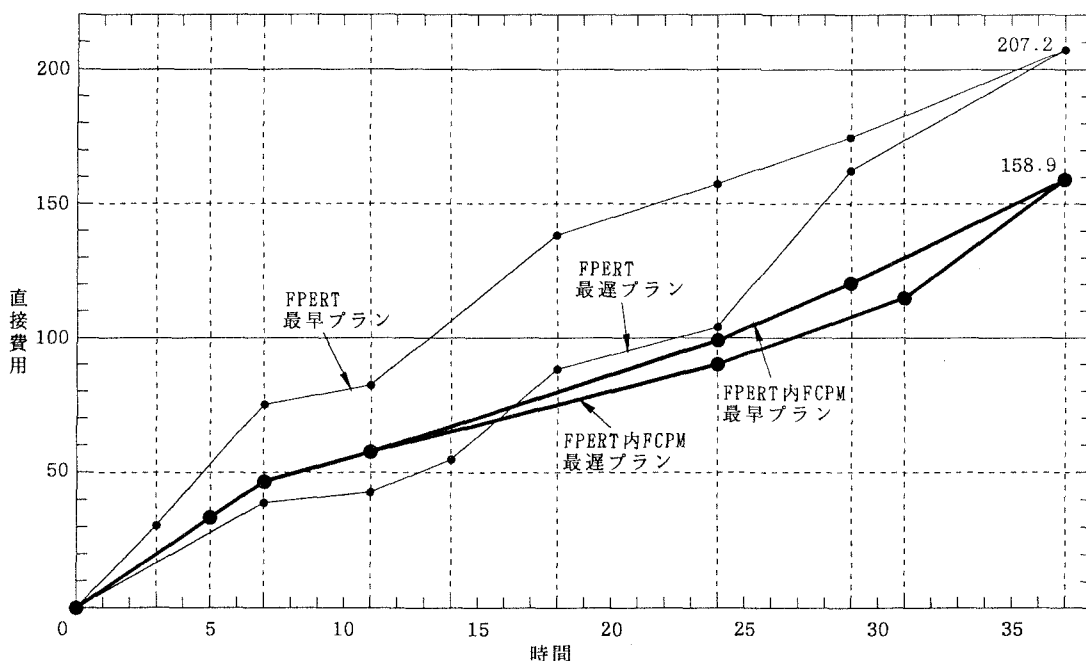


図-5 FP PERTとFP PERT内FCPMにおける直接費用の累加曲線($\lambda_r=0.4$ 、 $\lambda_c=0.5$)

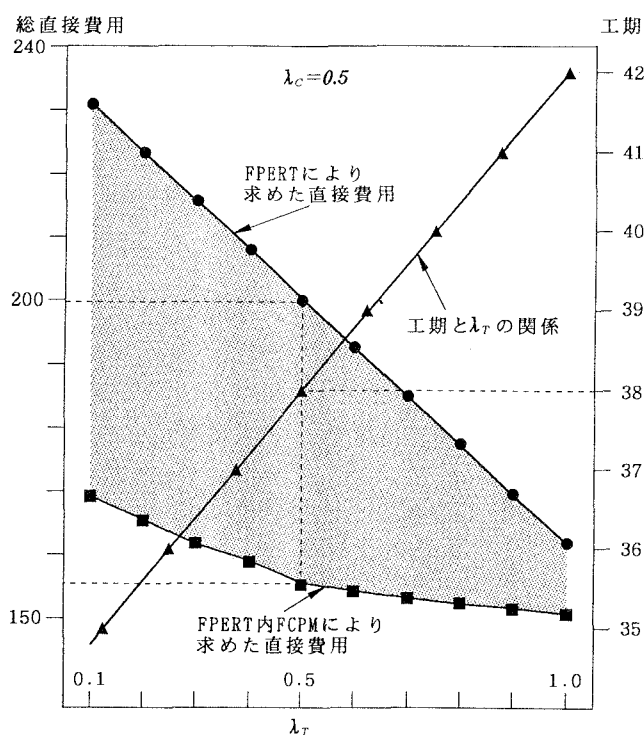


図-6 工期、 λ_T と直接費用との関係($\lambda_c=0.5$)

た日程途中の費用の変動を気にしないでよい場合には、FPERTモデルによる計画を採用しても近似的に十分である。あるいは、図中網かけのFPERTとFPERT内FCPMとの費用の差は、ある意味では設定された λ_T 、

λ_c のもとでの直接費用の可能範囲であるといえる。すなわち、最大限FPERTによる費用を見込めばよく、うまく計画すれば最小のこととしてFPERT内FCPMによる費用まで圧縮できると解釈できる。

$\lambda_c=0.5$ のもとで λ_T を変化させながら直接費用、間接費用と、それらの和である工費の変化を図-7(1)に示す。これより、 $\lambda_T=0.6$ のときが $\lambda_c=0.5$ のもとでの最小の費用を実現する計画になるといえる。

また上記内容のうち、種々の λ_c に関する λ_T （したがって工期）と総費用との関係をプロットすれば同図(2)のとおりである。§5の最後に述べるように、工期及び工費の上限、 λ_c 、 λ_T の観点から採用すべき計画を考察することは、まずは本図に工期、工費の上限と、容認可能な λ_c 、 λ_T の下限を記入して範囲を限定し（例えば工期 ≤ 40 、工費 ≤ 330 、 $\lambda_c \geq 0.5$ 、 $\lambda_T \geq 0.4$ とすれば図中網かけ部分）、その中で、各 λ_c 、 λ_T に対する解を取り出しながら詳細に検討することである。最も費用を小さくしたい場合には、 $\lambda_c=0.5$ 、 $\lambda_T=0.6$ で、工期は39、費用は300となる。あるいは、工期にしても費用にしても計画の実現可能性を最も大きくしたい場合には、網かけ部の右上隅近傍点を採用し詳細に検討する等である。

7. 結語

(1) 直接、間接費用、総費用と工期との関係($\lambda_c=0.5$) (2) λ_T 、 λ_c に対する総費用と工期との関係

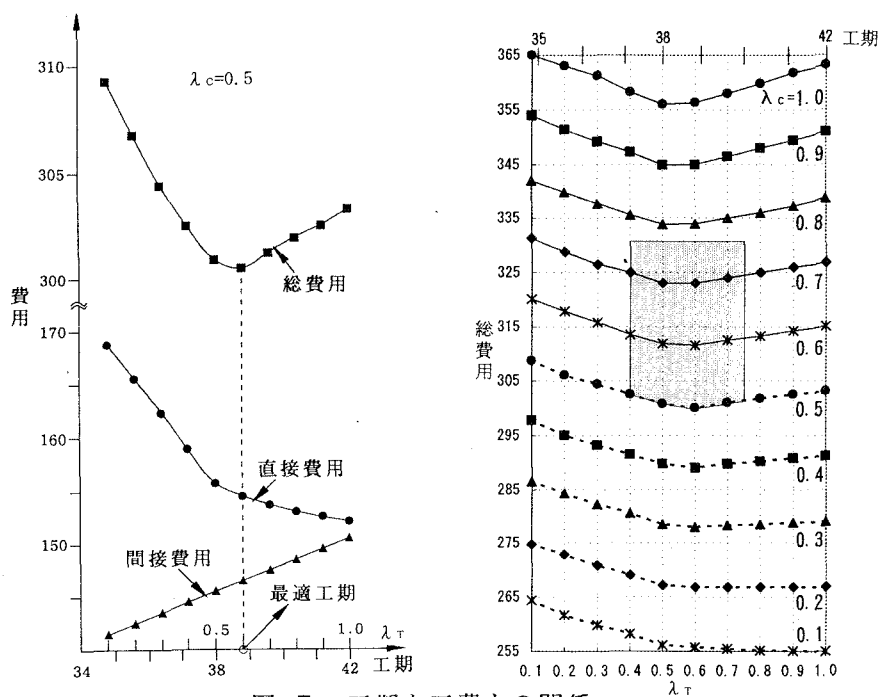


図-7 工期と工費との関係

本研究は、工期が限定され、かつコスト縮減が厳しく問われる建設工事において、作業の日数や費用が本来的にあいまい推定であること、またそのことを踏まえることがより妥当な現場判断であることを考慮し、工期と工費のトレードオフの中で工程・費用計画、管理のための妥協解を求めるネットワーク手法を提案した。その際、現実の大規模な工事ネットワークに適用可能な実用的方法として、FPERTとFCPMの組合わせによる親子問題として理論的体系化を図り、また、ネットワークの分割法、解析モデルの次元縮減化策等の工夫について論じた。さらに、複雑なネットワークに対処するために、作業要素の順序関係に関するデータからISMまたはFSMを活用したネットワークの作成手法とその際の留意点を検討し、このことをも含めた実務的工程計画手法としてのFPERT/FCPMを提案した。その上で、提案手法を具体的な計算例にあてはめると共に、その妥当性及び有用性を明らかにし、また結果の活用に関し考察した。

結局、FPERT/FCPMの全体の手順は§5に述べるとおりである。TCTモデルのように、本題を多目的計画法のもとで強引にモデル化し、その解法を考えるのではなく、内容を修正の上、FPERTとFPERT内FCPMの親子問題として定式化する工夫と、 λ_r 、 λ_c に関するパラメトリックな検討の提案であり、一種の会話型計算システムともいえる実用的方法である。

本法は従来からのPERT、CPMの知識と関係づけられ、その意味で実務での活用が大いに期待される。その一方で適用上の課題として、 λ_r 、 λ_c に関する判断があるが、この点は過去の事例に関する適用と反省を踏まえてそうした情報の蓄積が必要である。

これで、著者らがFPERTの提案以来これまで検討し

てきた作業日数、作業費用のあいまいな内容をそのまま推定し用いるという考えのもとでの一連の計画手法の研究が集大成できた。しかし、さらに追及すれば、工程途中における資金制約や資源制約の取り扱いを可能にする拡張問題等があり、あるいは提案手法よりえられる諸情報のビジュアルな提供を含めたソフト開発があり、残された課題である。

参 考 文 献

- 1) 萩原浩編：土木工事ネットワーク工程表の作り方と実例、近代図書、1984.
- 2) 建築施工管理技術研究会：建築技術者のためのネットワークプランニング、1989.
- 3) 樗木、Tatish他：作業日数のあいまいさを考慮した工程計画手法FPERTの提案とその応用、土木学会論文集、第419号/IV-13、pp.115～122、1990.
- 4) T. Chishaki, M. Tatish and H. Tatsumi: Project Scheduling under Fuzziness, FPERT, 3rd Int. Conf. on Modern Tech. in Const. Eng. & Project Management, pp.19～24、1992.
- 5) 曾、樗木、辰巳、励、施：作業費用のあいまい推定にもとづいた工程計画手法ファジーCPMの提案、九州大学工学集報、第69巻第4号、pp.443～450、1996.
- 6) 樗木、曾、辰巳、黄：作業の日数と費用のあいまいな判断を考慮した近似最適工程計画手法、建設マネジメント研究論文集、Vol. 3、pp.151～162、1995.
- 7) H. Tseng, T. Chishaki, H. Tatsumi and W. Shih: An optimal time-cost trade-off procedure of project scheduling under fuzzy activities duration and fuzzy cost estimation, Int. Conf. on Urban Eng. in Asian Cities in the 21st Century, Bangkok, pp. D259～264、1996.

Approximate Optimal Scheduling Procedure, FPERT/FCPM, based on Fuzzy Estimation of Time and Cost

Time and cost trade-off model (TCT model) for optimal scheduling procedure of construction project was proposed in our previous paper. However, the mathematical model for TCT model was much complicated with many conditional inequalities and its application to the large-scale network could be hardly done. In this paper, another effective scheduling procedure in place of TCT model, FPERT/FCPM model, are proposed, which assure the same time and cost trade-off schedule as in TCT model. Proposed FPERT/FCPM model is applicable to the large-scale network and provides the decision maker with a practical tool to control cost and time, effectively.