ネットワーク工程表の構造特性分析と最適工程計画モデル構築に関する理論研究

A Study on Theory for Analysis of Network Structural Characteristics and Development of Optimal Scheduling Models

立命館大学理工学部　正　員　春名　攻*
立命館大学大学院　学生員　○滑川　達**
By Mamoru HARUNA and Susumu NAMERIKAWA

大規模化，複雑化さらには多様化の傾向が著しい建設プロジェクトにおける施工計画問題の中核を構成する工程計画の検討方法としては，ネットワーク工程表を用いたＰＥＲＴ，ＣＰＭ等々のネットワーク手法をシステムモデルとして導入した方法が効果的であるといわれてきた．しかし，既存のネットワーク手法を，他産業とは多くの異なった管理特性を有する建設生産システムにそのまま適用することは困難である場合が多く，これまで多方面から様々なアプローチが試みられてきたが，完璧な成果はいまだ確立されていないのが現状である．このため，これまでに新たな理論や手法の展開をめざしての基礎研究として，われわれはネットワーク工程表の構造特性把握のための分析的研究をおこない発表してきた．

本研究はこれらの研究成果にいくつかの新たな理論的成果を付け加えて集約するとともに，この結果をベースとしたいくつかの最適工程計画モデルの構築に関して論じたものである．

【キーワード】：*施工計画，ネットワーク工程表，ネットワークトポロジー*

１．はじめに

大規模土木構造物や都市施設の建設プロジェクトにおける施工計画の中核を構成する工程計画問題の方法論や手法開発の研究分野では，これまでオペレーションズリサーチや応用数学の分野の範疇において発展した経過が認められ，その実体も数理計画法や経営科学的手法の適用研究が主体となって発展してきた傾向が伺える．

一方，このような数多くの適用研究の成果ならびに手法のベースとなる理論の再検討を通して，これまで開発されてきた既存理論や手法の限界をまったく新しいアプローチを展開することによって補正していく必要があることも徐々に認識されるようになってきた．

われわれは上述のような認識のもと，工程計画をネットワーク工程表を用いて検討することを前提として，まずネットワーク工程表の構造特性，すなわち工事施工をおこなうためのすべての作業間の順序関係にもとづくネットワーク構造特性の把握に関する分析的研究をおこない，その成果は逐次発表してきた．さらに，本研究ではこれらの研究成果に対し，新しく判明した理論的成果を集約するとともに，この結果をベースとして既開発手法とは異なった理論的側面をもつ最適工程計画モデル構築のための応用研究の内容に関して論じていくこととする．

*　理工学部環境システム工学科
**　理工学研究科土木工学専攻
Tel.(0775)61－2736(EX8770) Fax.(0775)61－2667

２．ネットワーク工程表の導入効果と既存のネットワーク手法に関する考察

現実の工事施工においては，管理対象としてあげられる原価，品質と施工工程との間には，明らかに以下に述べるような有機的な関係が存在している．すなわち，工事原価は工程を構成している各作業に投入される各資源の量と，これら資源の時間拘束の関数として表される．つまり，同一工事でも工程の内容が異なれば，たとえ投入資源の種類や数量が同じであっても工事原価は大きく変動することとなる．また品質に関しては，構造物が一度竣工した後に，品質の改善を図ることは多大な手間と費用が必要となるため，構造物の建設過程，すなわち工程を通して原材料の検査と作業管理をおこない，構造物の品質を保証することが必要となる．このような工程計画を中核とする原価・品質の間のメカニズムは，ネットワーク工程表を導入して工程計画のプロセス化を図ることにより，かなりの精度をもって求めることができる．また，ネットワーク工程表を用いて工程計画を表すと，各作業の実施過程やすべての資源の使用状況が容易に求められるので，それにもとづ

いて原価管理を実施することが可能となる．

さらに，このネットワーク工程表の特徴を，より一般的なネットワーク概念，ならびにシステム論的な視点から眺めてみれば，一般に

①先行，並列，後続の作業分析による業務の明確化

②図形表現による施工プロセスの明確化

③部分的な最適化ではなく，全体としての立場での総合的最適化

④工事施工の調整，変更への弾力的対処，および計画性の向上

⑤科学的管理手法の導入による合理的計画の確立および数値的合理性の明確化

等々の導入効果が期待できるといわれている．特に，上記⑤については，従来のバーチャート方式を中心とする工程計画の方法にかわるよりすぐれた科学的管理手法としてのＰＥＲＴ，ＣＰＭ等のネットワーク手法を導入可能とするという点で，その意義は非常に大きいものといえる．

さて，このネットワーク手法では，1950年代後半に米国において，プロジェクトの計画・管理を目的としたＰＥＲＴ，ＣＰＭが開発されて以来，これらの技法を拡張した

①確率ＰＥＲＴ

②ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ

③ＰＥＲＴ／ＣＯＳＴ

等々のいわゆるＰＥＲＴ系手法を中心とする多くの工程計画モデルが報告されている．これら既存のネットワーク手法では，各作業のもつ所要時間の変動とか，時間の進行とコストや資源の関係など，豊富なバリエーションのもとで多くの条件を付加した応用研究として理論的な発展が図られている[1]．そして，これらの手法における解法上の理論的な基礎は，詰まるところ”クリティカルパス解析”にあるといえよう．しかし，このようなクリティカルパス解析にもとづく既存理論では，現象再現性を犠牲にして問題を単純化し，ＬＰ問題に帰着させたり，実用的側面からの要請にしたがって，発見的（heulistic）なスケジューリング手法として最適性に保証のない妥当解を求めるにとどまっているような例が少なくない状態である．例えば，ＣＰＭにおいては，各作業の費用関数に線形性を仮定した限定的な条件下でしか適用することが困難であるし，ＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲなどでは，近似解法のみが手法化されており，完全な最適解法はいまだ開発されていないのが現状といえる．さらに，以上のようなＰＥＲＴ系手法にもとづく適用研究やその拡張形としての応用研究が数多く進められるにつれ，より一般的な条件の下で最適な工程計画を可能とするためには，既存理論の限界を超え，クリティカルパス解析とは全く異なった理論的側面をもつアプローチの展開が，必要であることが明らかとなってきている．

３．ネットワーク工程表の構造特性分析

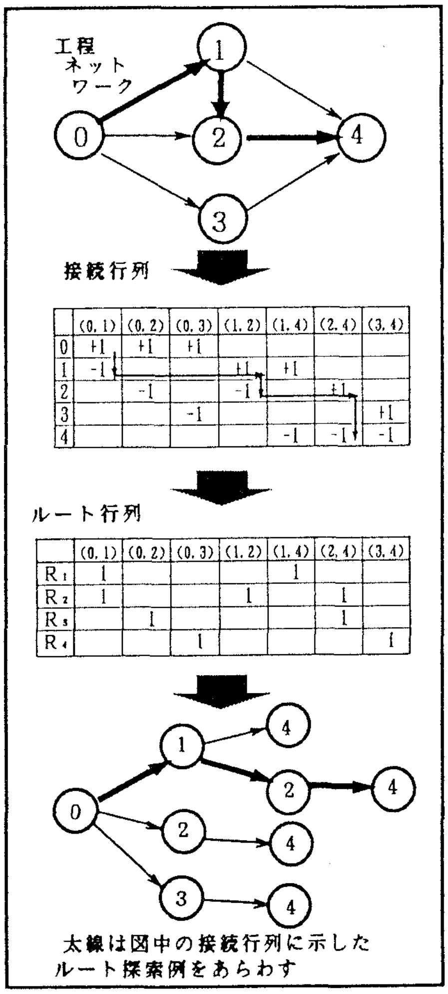
ここでは，前節までのような認識のもと，ＣＰＭやＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ型の非常に複雑な工程計画の問題をより一般的な条件下でも取り扱えるような解法開発を念頭に置いておこなった基礎的研究の成果について述べる．すなわち，工程をネットワーク工程表を用いて表した場合の効果を最大限に発揮させることを目的として，ネットワーク工程表が内含する時間や資源などの量的情報にとどまらず，質的な情報として表現されているネットワーク構造特性そのものの，すなわち作業間の順序関係の把握を数理的分析により試みた．特に，ここでは与えられたネットワークにおけるルート構造とカット構造に着目して，これらの分析手法について論述していくこととする．

（１）ルート構造の分析[2)]

大規模建設プロジェクトの工程には，施工法などによる技術的側面や，制約のある資源による遅れなどから生じる作業間の先行，後続関係が複雑に存在している．ネットワーク工程表において，この先行，後続関係は直列的な構造として表現されている．そして，工程全体をとおしてのこの直列構造は，ネットワークの始点から終点までの作業の流れを表すルート構造を分析することにより，かなりの精度で把握することができる．

そこで，本研究では以上のような認識にもとづき，ルート構造分析のための数理的手法を開発した．この手法の中では，接続行列上のルートの性質，すなわち，「ネットワーク工程表の接続行列上において，ルートは始終点間を縦→横→縦→横→・・・という単純な反復運動を繰り返す」という性質を**図－１**に示したように効果的に導入している．特に，ここでは資源の転用など工程計画の合理化を考慮して，計画者が設定する管理的順序関係が，完全に決定されていない段階におけるネットワーク工程表，すなわち方向性をもたないリンクが含まれているようなネットワークにおいても，検討の対象となるすべてのルートの抽出が可能な理論として手法化を試みた．

なお，ここではネットワーク工程表として広く用いられているプロジェクトグラフ型，アローダイアグラム型の２つのタイプを区別することなく，より

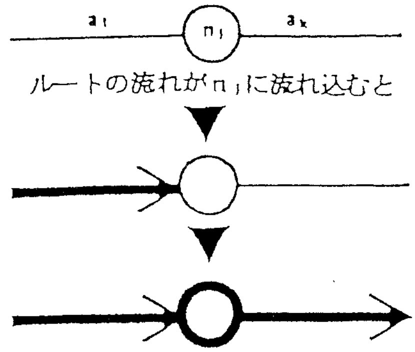


	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 2)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)
0	+1	+1	+1				
1	-1			+1	+1		
2		-1		-1		+1	
3			-1				+1
4					-1	-1	-1

	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 2)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)
R_1	1				1		
R_2	1			1		1	
R_3		1				1	
R_4			1				1

図－1　ルート構造分析の考え方

一般的なネットワーク構造として捉えているため，以下においてはその構成要素の表現として，リンクならびにノードといった通常のグラフ，ネットワーク理論[3)]で用いられる呼称を採用することとした．



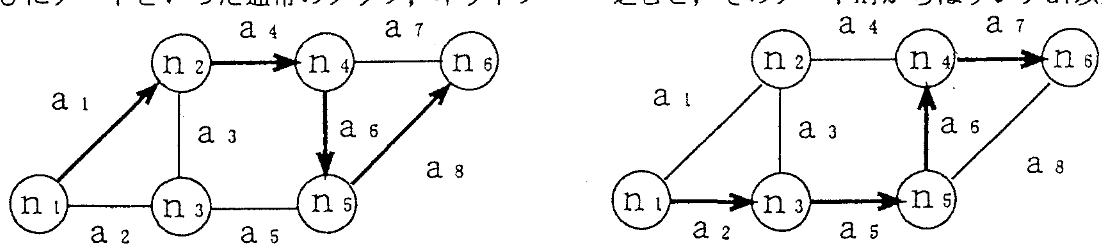
図－2　リンクの方向性の発生過程

いま，われわれは，対象とするルートを始点Sと終点T間を流れるルートとしてとりあげる．すなわち，ここではネットワークをルートフローの合成として捉えていくこととする．このため，方向性をもたないリンクが含まれたとしても，任意のルートは始点から終点へ向かうような方向性をもつルートとなる．当然そのルートを構成するリンクも，そのルートに関わる限り方向性をもっているかのように捉えることができる（**図－2**）．

上述のような解釈をルートに与えることにより，リンクの方向性の有無に関わらず，同様のアプローチの展開が可能となる．

すなわち，ネットワークのノードとリンクの結合関係のみに着目した

「ある流れがリンクa_iから，あるノードn_jに入り込むと，そのノードn_jからはリンクa_i以外の他のア



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
n_1	+1							
n_2	-1			+1				
n_3								
n_4				-1		+1		
n_5						-1		±1
n_6								-1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	カウントベクトル
n_1	1								1
n_2	1			1					1
n_3									
n_4				1		1			1
n_5						1		1	1
n_6								1	1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
n_1		+1						
n_2								
n_3		-1			±1			
n_4						-1	±1	
n_5					-1	±1		
n_6							-1	

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	カウントベクトル
n_1		1							1
n_2									
n_3		1			1				1
n_4						1	1		1
n_5					1	1			1
n_6							1		1

注）本理論では，図中a_8のようなリンクに対して双方向の検討を可能としている．

図－3　ルート生成過程

ークa_kに流れる．」

というルートの性質を取り上げ，これをグラフ理論で扱っている接続行列（I）で表すと，

「リンクa_iからノードn_jに入り込むときは，$I(n_j, a_i) = -1$であり，ノードn_jから他のリンクa_kに流れる時には，$I(n_j, a_k) = +1$である．」

となり，この性質をS～T間で用いることにより，本研究で取り上げているルートが生成できることとなる．

ただし，サイクルするルートは排除しなければならない．これについては，探索の際，対象とするネットワークの各ノードの通過回数をカウントする列ベクトルを設定することにより，その排除が可能となる（以下，カウントベクトルとよぶ）．**図－3**には，リンクに方向性をもたないネットワークにおけるルートの例を以上の基礎理論にもとづき，接続行列上で表したものを示している．

以下においては，これまでの論議を集約化して整理したルート構造把握のためのアルゴリズムを示しておくこととする．

〔ルート構造分析手法のアルゴリズム〕

step1； 始点・終点の設定

ネットワークにおける抽出したいルートの始点(n_s)・終点(n_t)の設定を行う．

この段階でのルートk_sは，以下のようである．

$$k_s = (n_s)$$

また，カウントベクトルα_iを設定する．

$\alpha_i \in \{0\}$，$(i = 1, 2, \cdots, m)$，

m；対象グラフのノード数

そして最初のカウントをカウントベクトルα_iに対しておこなう．

$$\alpha_i := \alpha_i + 1, \quad i = S$$

step2； ルート探索開始

接続行列δ_{ij}の第S行ベクトルb^s_jの要素が'+1'もしくは'1'であるリンク番号$j = jb$が，ルートk_sに続くv_{jb}であり，この段階でのルートk_{s+1}は以下のようである．

$$k_{s+1} = (n_s, v_{jb})$$

なお，$\delta_{ij} \in \{+1, 1, -1, 0\}$

（1は方向性を持たず，接続していることを表わす）

b^s_j；δ_{ij}におけるノードの要素n_sの行ベクトル

step3； 列ベクトルにおけるルート探索

接続行列δ_{ij}においてb^s_jの要素が'－1'もしくは'1'であるリンク番号jbの第jb列ベクトルc^{jb}_iの要素が，ルートk_{s+1}に続くn_{ic}である．しかし，n_{ic}はn_sとはしない．

$$k_{s+2} = (n_s, v_{jb}, n_{ic})$$

$$n_s \neq n_{ic}$$

また，カウントベクトルα_iの$i = ic$の要素をカウントする．

$$\alpha_i := \alpha_i + 1, \quad i = ic$$

step4； 行ベクトルにおけるルート探索

接続行列δ_{ij}の行ベクトルb^{ic}_jの要素が'+1'もしくは'1'であるリンク番号$j = jb'$に対応するリンクが，ルートk_{s+2}に続く$v_{jb'}$である．しかし，v_{jb}は$v_{jb'}$とはしない．

$$k_{s+2} = (n_s, v_{jb}, n_{ic}, v_{jb'})$$

$$v_{jb} \neq v_{jb'}$$

step5； 列ベクトルにおけるルート探索と循環ルートの排除

接続行列δ_{ij}の列ベクトル$c^{jb'}_i$の要素が'－1'もしくは'1'であるノード番号$i = ic'$のノード$n_{ic'}$が，ルートk_{s+2}に続く点である．しかし，n_{ic}は$n_{ic'}$とはしない．そのルートは，

$$k_{s+3} = (n_s, v_{jb}, n_{ic}, v_{jb'}, n_{ic'})$$

$$n_{ic} \neq n_{ic'}$$

である．このとき，$n_{ic'} = n_t$であればst間を通過する目的としているルートが探索されたこととなる．$n_{ic'} \neq n_t$であれば，カウントベクトルα_iのic'の番号の要素をカウントする．

$$\alpha_i := \alpha_i + 1, \quad i = ic'$$

加えて，

$\alpha_i = 2$ならば，循環ルートとなり，ルートk_{s+3}の探索を停止する．

$\alpha_i = 1$ならば，

$k_{s+2} := k_{s+3}$，$ic := ic'$，

$jb := jb'$

と設定し，step4へ．

さらに，以上のようなルート構造分析の結果から，ルート行列$\{a_{ij}\}$を作成して，各作業に付加された特性値ならびに問題の目的にもとづくルート選定基準βを設定すれば，例えば

$$\sum_{(i,j)\in P} a_{ij} \cdot d_j \geqq (\leqq)\ \beta$$

P；ネットワークに含まれる作業の集合

a_{ij}；ルート行列の構成要素$(\in\{1, 0\})$

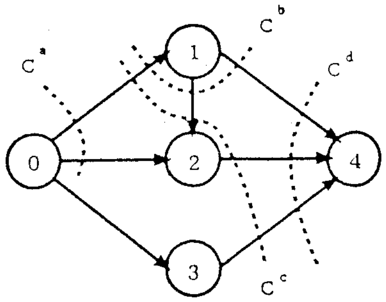
d_j；作業jの特性値

のような条件を満たすルート，すなわち問題の目的に対して"意味あるルート"のみを容易に抽出することができる．

以上のようにわれわれは，いまやネットワーク工程表に含まれるすべての意味あるルートを確実に把握できる．そしてルート構造を単一的ではなく，ネットワーク全体をとおして捉える，すなわちすべてのルートを同時に取り扱うことにより，作業の流れのみならず，施工工程におけるコストや資源の流れをも，的確に掴まえて，記述することが可能となる．

（2）カット構造の分析[4)]

ここでは，ネットワーク工程表において，先行・後続関係をもたない並列的な構造関係，すなわち，作業間の順序関係による制約を考慮することなく同時検討が可能となる作業の集合をアローダイアグラム型のネットワーク工程表でのカット構造として捉



図－4　カットの定義

えて，数理的な構造分析を実施していくこととする.

このため，本研究で取扱うカットを以下のように定義しておく．すなわち，

①任意のカットは常にネットワークの結合点を，始点を含む結合点集合と終点を含む結合点集合に分割する.

②任意のカットに含まれる作業間には順序関係は存在しない.

すなわち，上述の必要条件を満足していないカット，例えば，**図－4**に示すカットc^a・c^b(①を満足しない)やc^c(②を満足しない)のような逆向き作業を含むカットを，ここでの検討対象から排除し，本義論ではカットc^dのような上記①，②を満足させるカットのみを取扱うこととする.

さらに，ここで前述したカットのもつ条件①，②を作業の集合関係により示すと，

①' 任意のカットに含まれる全作業の先行集合と，可達集合の和集合に工程ネットワークを構成する全作業が含まれていなければならない.

②' 任意のカットに含まれる作業の先行集合，可達集合の作業がそのカットに含まれていてはならない.

なお，先行作業をある作業以前に終了していなければならない作業，可達作業をある作業が完了しない限り開始することができない作業とし，先行集合をすべての先行作業の集合，可達集合をすべての可達作業の集合とする.

なお，以下に示すカット構造の数理分析手法のアルゴリズムでは，ネットワーク工程表に含まれる各作業の直接的な順序関係のみに着目した順序行列をただ1つの初期情報としているため，プロジェクトグラフはもとより，作業リストのみが与えられているような場合にも適用可能な理論となっていることは容易に理解できる.

〔カット構造分析手法のアルゴリズム〕

step1；　順序行列(δ_{ij})の作成

対象ネットワークから順序行列(δ_{ij})をつぎの規定により作成する.

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\text{；作業 } j_j \text{ は作業 } j_i \text{ の直接的な後続作業である,}\\ 0\text{；作業 } j_j \text{ は作業 } j_i \text{ の直接的な後続作業ではない}\end{cases}$$

step2；　単位行列(e_{ij})を加える

$$\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}+e_{ij},\quad (i=1,2,\cdot\cdot,N,\ j=1,2,\cdot\cdot,N)$$

e_{ij}；単位行列.

step3；　可達行列(r_{ij})の作成

step2の行列(ε_{ij})をベキ乗計算して可達行列(r_{ij})を求める.

① $\alpha_{ij}=\varepsilon_{ij}$,
$(i=1,2,\cdot\cdot,N,\ j=1,2,\cdot\cdot,N)$

② $\beta_{ij}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\cdot\varepsilon_{jh}$,
$(i=1,2,\cdot\cdot,N,\ h=1,2,\cdot\cdot,N)$

③ もし $\beta_{ij}\neq\alpha_{ij}$,
$(i=1,2,\cdot\cdot,N,\ j=1,2,\cdot\cdot,N)$

ならば　$\alpha_{ij}:=\beta_{ij}$　として　s3．3へ,

もし　$\beta_{ij}=\alpha_{ij}$　ならば　$r_{ij}=\beta_{ij}=\alpha_{ij}$ となり,

また，r_{ij}の成分は,

$$r_{ij}=\begin{cases}1\text{；作業 } j_j \text{ が } j_i \text{ の後続作業,}\\ 0\text{；それ以外の時,}\end{cases}$$

となり，step4へ.

step4；　先行・可達行列(m_{ij})の作成

可達行列(r_{ij})より先行・可達行列(m_{ij})を求る.

$$m_{ij}=r_{ij}+r_{ji}-e_{ij},\quad (i=1,2,\cdot\cdot,N,\ j=1,2,\cdot\cdot,N)$$

$m_{ij}\in\{0,1\}$.

m_{ij}の成分；

$$m_{ij}=\begin{cases}1\text{：作業 } j_j \text{ が } j_i \text{ の先行または可達作業の時,}\\ 0\text{：それ以外の時.}\end{cases}$$

step5；　順序を持たない作業の抽出

作成された先行・可達行列(m_{ij})において，ある作業j_gの行ベクトルに注目し，$b^g{}_j=0$のリンクを全て抽出する.

$b^g{}_j$；m_{ij}の作業j_gの行ベクトル
$b^g{}_j\in\{0,\ 1\}$，$(j=1,2,\cdot\cdot,N)$

step6；　カットの抽出

いま抽出した作業群の行ベクトル$b^g{}_j$を$b^g{}_j=0$となっている要素番号kとし，先行・可達行列の第k行ベクトル$b^k{}_j$に加える.

$$v_j=b^g{}_j+b^k{}_j,\quad (j=1,2,\cdot\cdot,N)$$

さらに，m_{ij}において加え合わせた行ベクトルの行の要素番号の集合をIとする.
上の$v_j=b^g{}_j+b^k{}_j$の場合には,

$$I=\{j_g,\ j_k\},\quad I\in N$$

である．また，そのときのv_jの成分要素は以下のようである.

$$v_j=\begin{cases}0\text{；作業 } j_g,\ j_k \text{ と，その要素番号の作業は順序を持たない,}\\ 1\text{；その他.}\end{cases}$$

さらに，$v_j=0$であり，足し合わせた行ベクトル以外の要素番号をもつ行ベクトル(m_{ij}にお

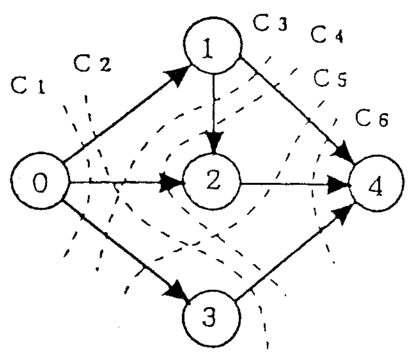
ける）を足し合わせて作成されたベクトル（v_j）の作業 j の要素が，

$$v_j = \begin{cases} 1：足し重ねた作業群（集合\mathrm{I}）以外のところ， \\ 0：足し重ねた作業群（集合\mathrm{I}）のところ， \end{cases}$$

となったときにカット c_h が抽出され，足し合わせた m_{ij} の行ベクトルの要素番号の集合（集合がカットに含まれる作業ナンバーとなる．

つまり，このような条件にもとづき，v_j は"0"であり，そのときに集合Ｉに含まれていない要素番号の行ベクトル（m_{ij} における）を v_j に加え続ける．

step7； 他のカットも同様に step1 から step7 を繰り返すことにより求める．



図－5　抽出されたカット

4．新しいネットワークスケジューリング理論の開発

ここでは，以上論述してきた既発表の研究成果に，ルート構造とカット構造との相互関係に関する新たな理論的成果を付け加えて集約するとともに，この結果をベースとした新しいネットワークスケジューリング理論の開発に関して論じていくこととする．

（1）ルート構造とカット構造の関係に関する検討

上述までのカット構造に関する議論では，作業の順序関係を中心に，ここでのカットを定義し，その分析手法についての論述をおこなってきたが，以下においては，前述のルートとの対応関係のもとで，再度，カットのもつ理論的な性質について検討を加えていくこととする．

これまでもたびたび論述してきたが，可達行列の表現する可達集合とは，任意の作業に対して直接的にも間接的にも後続関係をもつ作業の集合である．したがって，任意の作業に対する可達集合とは，その作業が完了しない限り，開始することのできないすべてのルートの部分的な集合である．さらに，可達行列における任意の列ベクトルが，その作業に対するすべての先行作業の集合を表現していることを考えあわせたならば，前述のカット抽出のためのアルゴリズムの過程の中で，可達行列にその転置行列を加えることより作成する先行・可達行列における任意の行ベクトルは，その作業を通過するすべてのルートに含まれる作業の和集合を表していることになる．すなわち，このアルゴリズムにおいてカットの条件を満足させ抽出した先行・可達行列における行ベクトルの組合せとは，すべてのルートの重複のないただ１度の合成をおこなっていることに等しい．

ここで以上の議論を整理すれば，先に定義したカットの条件①'はすべてのルートの切断を意味しており，②'は任意のルート対する２回以上の切断の禁止を意味していることとなる．

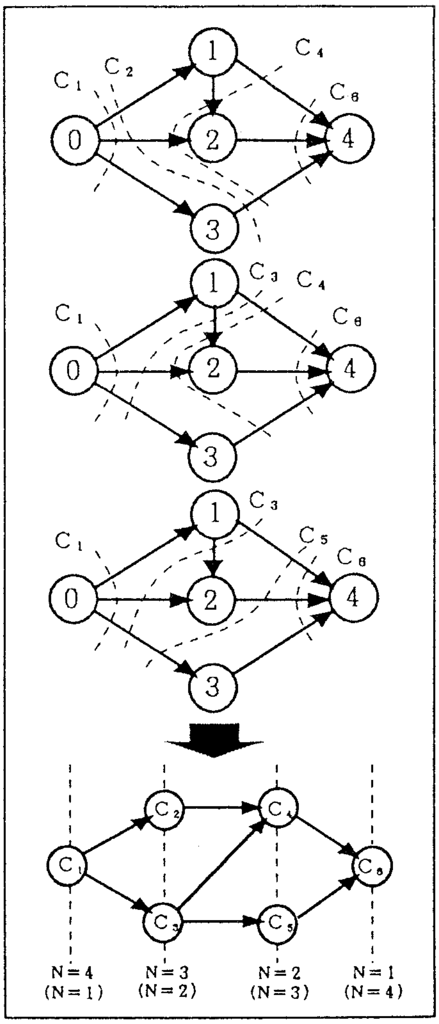
すなわち，ここで抽出したカットは，先述の意味あるルートとの対応関係のもと「すべてのルートをたかだか１回切断するようなカット」として理論的に集約化できることとなる．

（2）カットネットワークの作成と工程計画問題の定形化

ネットワーク工程表の内容を，先述した作業の流れを始点から終点まで表すルート構造の合成として考えたとき，一般的な工程計画の問題は，複数ルートの同時検討問題として捉えることができる．このような問題では，カット断面に着目したルートの状態分析を実施することが効果的であり，このことについては，先に述べたルート，カットの関連構造からも容易に理解できる．

しかし，単一のカット断面のみによる分析では，ルートの部分的な状態しか検討することはできない．したがって，すべてのルートを全体的に検討していくためには，複数のカット間の構造関係にもとづく段階的な分析が必要となってくる．なお，ここではネットワーク工程表がサイクルのない有向グラフとして与えられているような場合を考えている．

本研究では以上のような問題提起のもと，カット構造間の相互関係を把握していくことを目的とした分析的研究をおこなった．そして，カットがあくまでも作業の集合として求められることに着目すれば，「作業の持つ順序関係を写像したカット間の順序関係」も存在するということを発見した．すなわち，このような研究成果として，上述のカットの定義に着目すれば，任意の単一カットに含まれる作業間には順序関係は存在していないため，「隣接するカット間にはただ１つの結合点が存在しており，その結合点に連結している作業間の順序関係がカットの直接的な順序関係として写像される」ことを明らかにしている．このようなカット間の順序関係を工程の



図－6　カットネットワーク

流れに沿って構造化すれば，対象となるネットワークに含まれるすべての作業を網羅するとともに，カット間に交差のない，すなわち**図－6**に示したような工程全体をとおしてのいくつかの検討パターンを求めることができる．これにより，対象としていたネットワークは，これらの検討パターンをルート構造で表現した新たなネットワークへトポロジカルに変換できることになる．なお，このネットワークをカットネットワークとよぶこととする．以下に，カットネットワーク作成のためのアルゴリズムを整理しておく．

〔カットネットワーク作成のためのアルゴリズム〕

step1；カットの順序行列（d_{ij}）に単位行列（e_{ij}）を加える

カット間の順序行列に対して単位行列を加える．その計算過程は以下のようである．

$b_{ij}=d_{ij}+e_{ij}$

$(i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,m)$

m；カットの数

d_{ij}；カット間の順序行列

e_{ij}；単位行列

なお，d_{ij}の要素の意味は以下のようである．

$d_{ij}=$ 1；カットc_jに含まれるすべての作業が隣接するカットc_iに含まれるすべての作業に対して可達関係にあるとき
0；その他

step2；可達行列（γ_{ij}）の作成

step1の行列（b_{ij}）をベキ乗してカットの可達行列（γ_{ij}）求める．

① $\alpha_{ij}=b_{ij}$

$(i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,m)$

② $\beta_{ij}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\cdot b_{jk}$

$(i=1,2,\cdots,m,\quad k=1,2,\cdots,m)$

③ もし　$\beta_{ij}\neq\alpha_{ij}$

$(i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,m)$

ならば　$\alpha_{ij}:=\beta_{ij}$　として　s2．2へ

もし　$\beta_{ij}=\alpha_{ij}$

ならば　$\gamma_{ij}=\beta_{ij}=\alpha_{ij}$　であり，

また，γ_{ij}の成分は，

$\gamma_{ij}=$ 1；カットc_jがカットc_iに可達関係を持つとき
0；それ以外のとき

となり，step3へ．

step3；可達行列γ_{ij}よりカット間構造関係の明確化

可達行列γ_{ij}において可達関係でも先行関係でもないカットの集合を逐次求め，その集合と隣接する集合のカットの関係を求めることにより，カット間の順序関係を求める．

なお，カットネットワークには順序行列を用いた既存の構造化手法[5)]を適用して，各カットのレベル設定をおこなっておくこととする．

以上のように，カットネットワークは複雑なネットワーク工程表の構造特性を保存した形で単純化されているものであり，ネットワークトポロジーの考え方を適用することができる．したがって，上述のようなルート構造に着目した工程計画の特に施工プロセスがサイクルのない完全な有向グラフとして与えられるスケジューリングの問題は，カットネットワークを解探索のためのトラジェクトリーとしたもとのネットワーク工程表におけるルート状態の配分問題として理論的に整理することができる．

5．最適工程計画モデルの構築

ここでは，上述までの基礎的研究の成果をベースとして，理論的に整理した新しいスケジューリング理論を効果的に導入したいくつか最適工程計画モデル構築に関する応用研究の内容を示すこととする．

すなわち，以下においては，本スケジューリング

理論の適用例として，

① PERT／TIME型

② 確率PERT型

③ CPM型

の工程計画問題を取り上げて，それぞれの問題のための最適工程計画モデルを構築していくこととする．

(1) PERT／TIME型問題への適用

PERT／TIMEは，ネットワーク工程表に含まれる各作業（i，j）に標準的な状態のもとで遂行するのに必要な作業所要時間D_{ij}を与えた場合の，各作業のスケジュールを計算するための手法である[8]．一方，ここではこのPERT／TIME型の工程計画問題に対して，前述のスケジューリング理論にもとづいた，カットネットワークにおける各ルートの実施状態の配分問題として，DPを用いた従来とは異なるアプローチを試みる．

いま，状態変数をネットワーク工程表を形成するすべての各ルートの実施状況，すなわち，

$$R_{e,cz}=(r^1_{e,cz},\ r^2_{e,cz},\ \cdots,\ r_{e,cz},\ \cdots,\ r^m_{e,ciz})$$

$r^k_{e,cz}$；任意のレベルeでかつレベルe＋1のカットc_zと順序関係をもつカットc_yにおけるルートkの実施日数

のようなm次元ベクトルとおく．ただし，

$$R_{e,cz}\in PR_{e,cz}$$

$PR_{e,cz}$；実行可能な実施状況パターンの集合すなわち，c_yがレベルe，c_zがレベルe＋1であるとき，$(i,j)\in c_y$ かつ $(i,j)\notin c_z$ $(c_y \prec c_z)$ である作業（i，j）が完了している実施状況パターンの集合

つづいて，決定関数を各レベルのカットへの配分日数として設定する．いま任意のレベルeでかつレベルe＋1のカットc_zと順序関係をもつカットにおける状態変数$R_{e,cz}$のもとでこのカットc_yに配分される日数を，

$$g_{e,cz}(R_{e,cz})=g_{e,cz}(r^1_{e,cz},\ r^2_{e,cz},\ \cdots,\ r^m_{e,cz})$$

と表せば，この値はc_yに含まれ，かつc_zに含まれない作業により決定されるため，

$$g_{e,cz}(R_{e,cz})=\max_{\substack{(i,j)\in cy\\(i,j)\notin cz}}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{m} a_{k,(i,j)}\cdot r^k_{e,cz}}{\sum_{k=1}^{m} a_{k,(i,j)}} - h_{ijcx}\cdot g_{e-1,cy}(R_{e-1,cy})\right\}$$

$a_{k,(i,j)}$；ネットワーク工程表より作成したルート行列の構成要素

$$h_{ijcx};h_{ij}=\begin{cases}1；作業(i,j)が c_x に含まれているとき\\0；それ以外のとき\end{cases}$$

としたベクトルの構成要素

c_x；レベルe－1に含まれるカット

c_y；レベルeに含まれるカット

c_z；レベルe＋1に含まれるカット

として求めることができる．なお，このとき，

$$c_x \prec c_y \prec c_z$$

である．

ここで、すべてのレベル（1，2，・・・，n）をとおしての各ルートの総実施状況パターン$WR_{(n)}$を

$$WR_{(n)}=(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^k,\ \cdots,\ r^m)$$

n；カットネットワークに設定されたレベルの総数

r^k；ルートkの総実施日数

と表せば，以上の考え方を導入してプロジェクト完了時刻$f_n(WR_{(n)})$は，各レベルの決定関数値，つまりカットの配分日数の総和の最小として求められる．すなわち，

$$\text{minimize } f_n(WR_{(n)})=\sum_{e=1}^{n} g_e(r^1_{e,cie},\ r^2_{e,cie},\ \cdots,\ r^m_{e,cie})$$

となる．また，このときの条件は，

$$r^k_{1,ci1},\ r^k_{2,ci2},\ \cdots r^k_{n,cin}\geqq 0 \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{e=1}^{n} r^k_{e,cie}=r^k \quad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$c_{i1}\prec c_{i2}\prec\cdots\prec c_{in-1}$$

$$c_{in}\in\phi$$

なお，ここでは，作業が完了したか，していないかのみが問題となるため，計算過程の中で

$$r^k_{e,cie}<0 \quad となれば \quad r^k_{e,cie}:=0$$

と設定することとする．

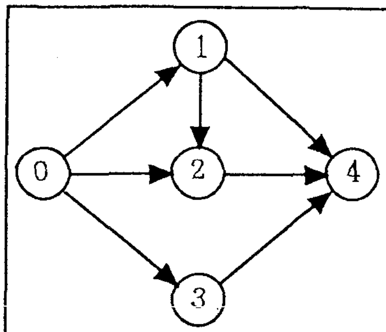
いま問題を，

$$
\begin{aligned}
f_n(r^1,\ r^2,\ \cdot\cdot\cdot,\ r^m) &= \min_{\substack{\sum_{e=1}^{n} r^k_{e,cie}=r^k\ (k=1,2,\cdots,m)\\ ci1\prec ci2\prec\cdot\cdot\cdot\prec cin-1\\ cin\in\phi}} \left\{\sum_{e=1}^{n} g_{e,cie}(r^1_{e,ci1},\ r^2_{e,ci2},\ \cdots,\ r^3_{e,cin})\right\}
\end{aligned}
$$

とおけば、上式の１からｎまでの各レベルが，フィードバックのないシステムとして捉えることができるカットネットワークにより設定されているので，ＤＰの基本原理である最適性の原理[7]より，

$$
\begin{aligned}
f_n(r^1,\ r^2,\ \cdot\cdot\cdot,\ r^m) &= \min_{\substack{0\leqq r^k_{n,cin}\leqq r^k\ (k=1,2,\cdots,m)\\ cin-1\prec cin}} \{g_{n,cie}(r^1_{n,cin},\ r^2_{n,cin},\ \cdots,\\
&\quad r^m_{n,cin})+f_{n-1,cin-1}(r^1-r^1_{n,cin},\ r^2-r^2_{n,cin},\\
&\quad \cdots,\ r^m-r^m_{n,cin})\}
\end{aligned}
$$

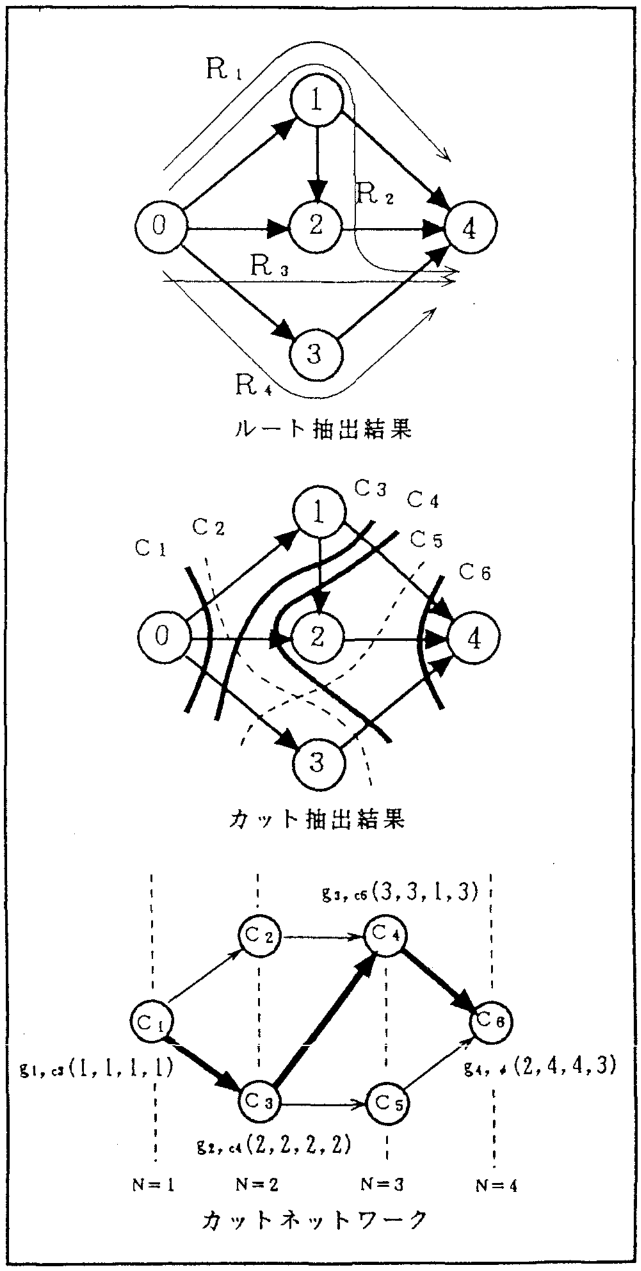
のような繰り返しの関数方程式として定式化することができる．



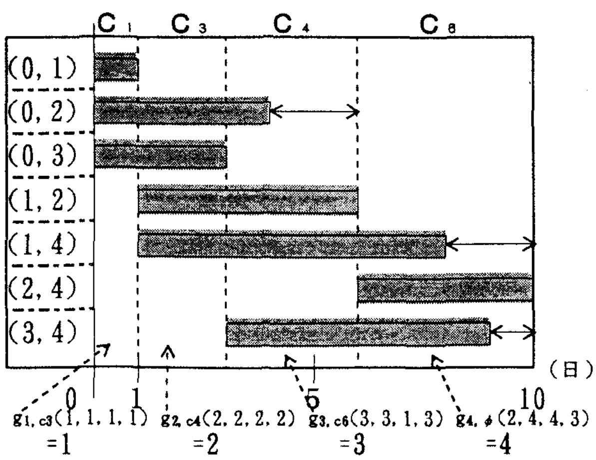
作業(i, j)	所要日数
(0, 1)	1
(0, 2)	4
(0, 3)	3
(1, 2)	5
(1, 4)	7
(2, 4)	4
(3, 4)	6

図－７　例題ネットワーク（PERT/TIME型）

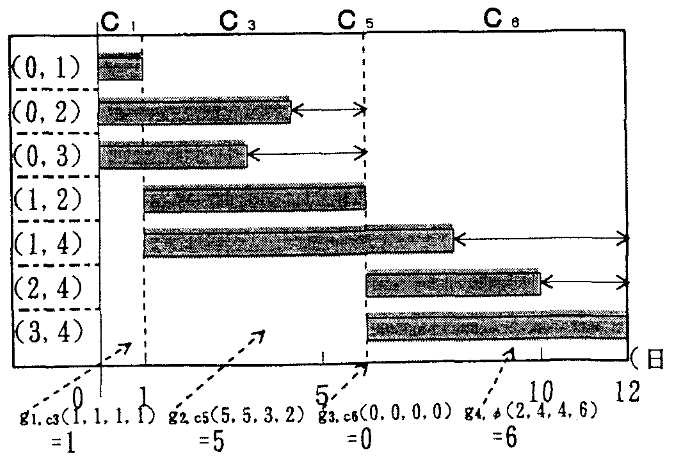
なお，ここで図－７のような例題に対して適用計算を実施したところ，図－８のようなカットネットワークの最適経路と，ルート実施状況の配分結果の例が算出された．さらに，この結果をバーチャートで表したのが図－９である．すなわち，



図－８　適用計算結果（PERT/TIME型）



図－９　バーチャート図（最適経路）



図－10　バーチャート図（他の経路の一例）

$$f_4(8,10,8,9) = f_{1.c3}(1,1,1,1) + f_{2.c4}(2,2,2,2) + f_{3.c8}(3,3,1,3) + f_{4.\phi}(2,4,4,3) = 10 \quad (日)$$

のような最小のプロジェクト完了時刻とスケジュール案の一例が求められた．ここで一例と断ったのは，例えば作業（0，2）などはカットC_4が終わる６日まで，その完了時刻を自由に取ることができるためであり，本モデルでは，このようなすべてのスケジュールを抽出することができる．また，**図－10**には最適経路とはならなかった$C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow C_5 \rightarrow C_8$での配分結果の例を示しておく．

以上示した方法は，その計算効率の面で従来の手法に及ぶものではない．しかし，その理論をとおして，同時施工可能な作業の集合であるカット構造を用いても工程進捗の時間経過を把握できることが明らかにされており，その意義は極めて大きいといえる．すなわち，本理論は将来，ＰＥＲＴ／ＭＡＮ－ＰＯＷＥＲ問題が時間断面での資源割付け問題として展開できる可能性をもつことを示すものである．

（２）確率ＰＥＲＴ型問題への適用

上述のＰＥＲＴ／ＴＩＭＥにおいては，作業所要時間が１点見積もりであるのに対して，確率ＰＥＲＴの手法では，各作業（ｉ，ｊ）に対して，楽観値a_{ij}，最可能値m_{ij}，非観値b_{ij}の３点を用いて見積もり，また，１つの作業が多数回実行されたときの所要時間の確率分布を一種のベータ分布として近似させ，望ましいプロジェクト完了時刻の検討をおこなうものである[8]．

しかし，従来の確率ＰＥＲＴの手法では，以下のような問題点が指摘されている[9]．

①ベータ分布に近似することが，必ずしも妥当ではなく，相当の誤差が生じる場合が存在する．
②期待値が過小評価されている．
③平行なパスにおいては分散が過大評価されている．

このため，ここでは以上の問題点を補正し，プロジェクトの安全性や妥当性を正しく評価することができ，かつ分布形が一般的な場合に対しても数値演算が可能な工程計画モデルを構築する．

なお，このようなモデルとしては，執筆者の１人である春名が既にコンボリューションの導入により開発しているが[10]，以下においては，別解法として前述のスケジューリング理論の適用を試みる．

いま，カットネットワークにおける任意の１つのルートに着目する．これは，確率ＰＥＲＴ型問題においては，各作業の検討すべきそれぞれの所要時間における工程全体の安全性や妥当性を示す確率が，各作業の検討順序に影響を受けることはないためである．また，カットネットワークの任意のルートが，すべての作業を網羅していることを考え合わせれば，ここでの検討がカットネットワークのただ１つのルートのみをとり扱えばよいことは明らかである．

このとき，レベルｅまでにネットワーク工程表における各ルートの実施日数が$(r_e^1,\ r_e^2,\ \cdots,\ r_e^m)$である確率$g_e(r_e^1,\ r_e^2,\ \cdots,\ r_e^m)$は，

$$\begin{aligned} g_e(r_e^1,\ r_e^2,\ \cdots,\ r_e^m) &= \sum_{(r_{e-1}^1,\ r_{e-1}^2,\ \cdots,\ r_{e-1}^m)} g_e\{(r_e^1,\ r_e^2,\ \cdots,\ r_e^m) \mid (r_{e-1}^1,\ r_{e-1}^2,\ \cdots,\ r_{e-1}^m)\} \\ &\quad \cdot g_{e-1}(r_{e-1}^1,\ r_{e-1}^2,\ \cdots,\ r_{e-1}^m) \end{aligned}$$

で与えられる．ここで，条件つき確率$g_e\{(r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^m) \mid (r_{e-1}^1, r_{e-1}^2, \cdots, r_{e-1}^m)\}$は，

$$\begin{aligned} g_e\{(r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^m) \mid (r_{e-1}^1, r_{e-1}^2, \cdots, r_{e-1}^m)\} &= g_{e-1}(r_{e-1}^1, r_{e-1}^2, \cdots, r_{e-1}^m) \\ &\quad \cdot F(r_e^1 - r_{e-1}^1, r_e^2 - r_{e-1}^2, \cdots, r_e^m - r_{e-1}^m) \\ &\quad / g_{e-1}(r_{e-1}^1, r_{e-1}^2, \cdots, r_{e-1}^m) \\ &= F(r_e^1 - r_{e-1}^1, r_e^2 - r_{e-1}^2, \cdots, r_e^m - r_{e-1}^m) \end{aligned}$$

さらにこの$F(r_e^1 - r_{e-1}^1, r_e^2 - r_{e-1}^2, \cdots, r_e^m - r_{e-1}^m)$は，

$$F(r_e^1 - r_{e-1}^1, r_e^2 - r_{e-1}^2, \cdots, r_e^m - r_{e-1}^m) = \prod_{\substack{(i,\ j) \notin c^{e-1} \\ (i,\ j) \in c^{e}}} \left[\frac{\sum_{k=1}^{m} a_{k,(i,j)} \cdot f_{ij}(r_e^k - r_{e-1}^k)}{\sum_{k=1}^{m} a_{k,(i,j)}} \right]$$

$a_{k,(i,j)}$；ネットワーク工程表より作成したルート行列の構成要素
$f_{ij}(\ )$；作業（ｉ，ｊ）の所要時間分布
c^{e-1}；レベルｅ－１のカット
c^{e}；レベルｅのカット

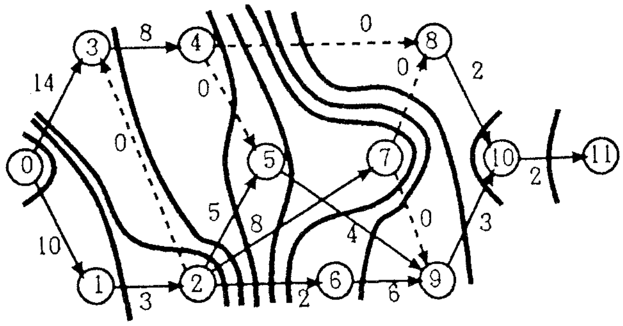
として求めることができる．

そして，以上の計算をレベル１～ｎまで実施する．このとき，与えられたネットワーク工程表の全体工期の確率密度関数ｇ（λ）は，

$$g(\lambda) = \sum_{(r_n^1,\ r_n^2,\ \cdots,\ r_n^m) \mid \max(r_n^1, r_n^2, \cdots, r_n^m) = \lambda} g_n(r_n^1,\ r_n^2,\ \cdots,\ r_n^m)$$

で与えられる．

なお，以下においては**図－11**に示すネットワークとカットの検討パターンを用いた適用計算の結果を示すこととする．このプロジェクトは１２個の作業



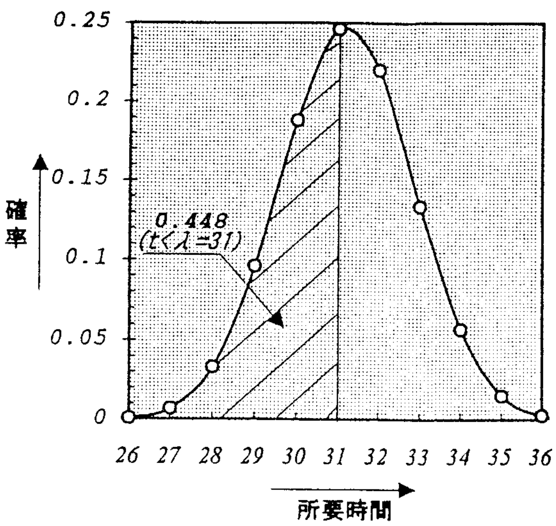
図－11　例題ネットワーク（確率PERT型）

表－1　作業所要時間分布

作業 i	作業 j	fij $(\delta-3)$	fij $(\delta-2)$	fij $(\delta-1)$	fij (δ)	fij $(\delta+1)$	fij $(\delta+2)$	fij $(\delta+3)$
0	1	0.01	0.04	0.24	0.42	0.24	0.04	0.01
0	3	0.01	0.06	0.24	0.38	0.24	0.06	0.01
1	2			0.20	0.60	0.20		
2	5		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
2	6			0.10	0.80	0.10		
2	7		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
3	4		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
5	9			0.20	0.60	0.20		
6	9		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
8	10			0.10	0.80	0.10		
9	10			0.20	0.60	0.20		
10	11			0.10	0.80	0.10		

と５個のダミーからなっており，各リンクに付加されている数字は，その作業所要時間分布の期待値を表している．また，各作業所要時間分布を表すヒストグラムは，**表－１**のように表されているものとする．ただし，f_{ij}（δ）は計画どおりの期待値δ日で作業が完了する確率であり，例えばf_{ij}（$\delta+1$）は計画より１日遅れる確率を表す．

このような例題に対して，本モデルを用いてプロジェクト完了時刻を求めたところ，**図－12**のような確率分布が得られた．この結果と１点見積によるＰＥＲＴ計算の結果を比較すれば，予定の３１日間でプロジェクトが完了しない確率が５５．２％だけ存在



図－12　プロジェクト完了時刻の確率分布

することがわかった．

（３）ＣＰＭ型問題への適用

ここでは，与えられた標準的な工程計画の内容を計画者の希望する工期までもっとも安価に短縮することの可能な最適工程計画モデルを構築した．なお，このような問題は，費用曲線が線形で与えられている場合には既存のＣＰＭ手法を用いても解は求められるが[11]，ここでは一般形の費用曲線でも求められるような解法として構築している．

ａ）検討対象ネットワーク

さて，ＰＥＲＴ計算により求められている初期のスケジュール案の示す工期λに対して，αの短縮を実行しようとする場合には，クリティカルパスに含まれている作業以外にも，短縮の対象となる作業が存在することは容易に理解できる．

ここで，トータルフロートが作業のもつ全余裕日数であることに着目すれば，短縮の検討対象となる作業を限定することは，十分に可能である．すなわち，

$$t^E_i = \max_{(k,\ i)\in P}\{t^E_k + D_{ki}\}$$

$$t^E_0 = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

の関数方程式によって，最早結合点時刻t^E_iならびにプロジェクト完了時刻$t^E_n = \lambda$を算出する．このとき，プロジェクト完了時刻λが制約工期に対して，αだけ超過していれば，

$$\lambda - \alpha = \lambda' = t^L_n$$

として，以下に示す関数方程式によって最遅結合点時刻t^L_jを算出する．

$$t^L_i = \min_{(i,\ l)\in P}\{t^L_l - D_{il}\}$$

$$t^L_n = \lambda' \qquad i = n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 0$$

つぎにこれら算出された最早結合点時刻ならびに最遅結合点時刻を用いてトータルフロートTF_{ij}を

$$TF_{ij} = t_j - t_i - D_{ij}$$

として求める．そしてこのTF_{ij}が負の値をとる，すなわち，

$$TF_{ij} < 0$$

となる作業のみの集合で形成されるネットワークを作成する．本研究では，工程ネットワーク全体を短縮の対象として捉えるよりも，検討対象作業を限定することが合理的であると判断し，マイナスフロートをもつ作業のみからなる上述のようなネットワークを初期の検討対象としてとりあげる．なお，上述

において定義したネットワークにおけるルートは，一般にリミットパス（大成リミットパス）とよばれている．また，本研究ではこのリミットパスにより形成されるネットワークを，以後リミットパスネットワークとよぶこととする．

しかし，リミットパスネットワークにおいては，複数のリミットパスの合成により，リミットパスとはならないルートが形成されている可能性があるため，ここで前述のルート探索方法によって作成されるルート行列に以下のような処理を加えておくこととする．

まず，下式により，各ルートの所要日数を求める．

$$\sum_{(i,j)\in P} a_{k,(i,j)} \cdot D_{ij} \quad (k=R_1, R_2, \cdots, R_{10})$$

P；リミットパスネットワークに含まれる作業の集合

$a_{k,(i,j)}$；上で作成されたルート行列の構成要素

D_{ij}；作業（i，j）の標準所要日数

そしてこの所要日数が

$$\sum_{(i,j)\in P} a_{k,(i,j)} \cdot D_{ij} \leqq \lambda - \alpha$$

となるルートをルート行列からとり除く．なお，このようなルートを排除してたとしても，リミットパスネットワークが，短縮を必要とするリミットパスの合成として形成されている以上，その構造はなんら変化することはない．以後のルート行列という記述はこの行列をさす．

さらに，このリミットパスネットワークの構造を先述した新たなスケジューリング理論に沿って再度整理すれば，ここでの問題は，全リミットパスの同時短縮問題となり，さらにはカットネットワークにおける最小費用を与える経路探索と，その最適経路での短縮日数の割り当て問題として取扱うことができることとなる．

b）問題の定式化に関する検討

以下においては，これまでの議論にしたがって，CPM型の工程計画問題をDPを適用したカットネットワークにおける配分問題の解法として定式化していくこととする．

いま，状態変数をリミットパスネットワークにもとづく各ルートの短縮状況，すなわち，

$$\boldsymbol{R}_e = (r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^k, \cdots, r_e^m)$$

r_e^k；任意のレベルeにおけるﾙｰﾄkの短縮日数

m；リミットパスネットワークに存在するﾙｰﾄの総数

のようなm次元ベクトルとおく．ただし，

$$\boldsymbol{R}_e \in PR_e$$

PR_e；レベルeにおいて実行可能な短縮状況パターンの集合

つづいて，決定関数を各段の短縮費用として設定する．いま任意のレベルeにおける状態変数$\boldsymbol{R}_e$のもとで必要となる短縮費用を

$$g_e(\boldsymbol{R}_e) = g_e(r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^m)$$

と表わせば，この$g_e(\boldsymbol{R}_e)$の値は

$$g_e(\boldsymbol{R}_e) = g_e(r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^k, \cdots, r_e^m)$$

$$= \sum_{(i,j)\in P_c} \left[\frac{\sum_{k=1}^{m} a_{k,(i,j)} \cdot C_{(i,j)}(r_e^k)}{\sum_{k=1}^{m} a_{k,(i,j)}} \right]$$

（i，j）；作業

P_c；レベルeに設定されたカットcに含まれる作業の集合

$a_{k,(i,j)}$；リミットパスネットワークより作成したルート行列の構成要素

$C_{(i,j)}(r_e^k)$；作業（i，j）をr_e^k短縮したときに要する費用

として求めることができる．

ここで，すべてのレベル（1，2，…，n）をとおしての各ルートの総短縮状況パターン$\boldsymbol{WR}_{(n)}$を

$$\boldsymbol{WR}_{(n)} = (r^1, r^2, \cdots, r^k, \cdots, r^m)$$

n；カットネットワークに設定されたレベルの総数

r^k；ﾙｰﾄkの総短縮日数

と表わせば，計画全体としての総短縮費用$f_n(\boldsymbol{WR}_{(n)})$は，各レベルの決定関数値，つまり短縮費用の総和として求められる．すなわち，

$$f_n(\boldsymbol{WR}_{(n)}) = f_n(r^1, r^2, \cdots, r^m)$$

$$= \sum_{e=1}^{n} g_e(r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^m)$$

と表わすことができ，問題はこれを最小にすることである．また，このときの条件は，

$$r_1^k, r_2^k, \cdots, r_n^k \geqq 0, \quad \sum_{e=1}^{n} r_e^k = r^k \quad (k=1, 2, \cdots, m)$$

となる．ただし

$$\boldsymbol{WR}_{(n)} \in PWR_{(n)}$$

$PWR_{(n)}$；n個の全レベルをとおして実行可能な総短縮状況パターンの集合

いま，この問題を

$$f_n(r^1, r^2, \cdots, r^m) = \min_{\sum_{e=1}^{n} r_e^k = r^k \ (k=1,2,\cdots,m)} \left\{ \sum_{e=1}^{n} g_e(r_e^1, r_e^2, \cdots, r_e^m) \right\}$$

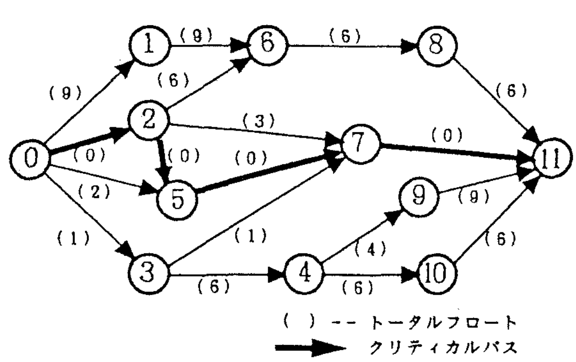
とおけば，上式の１からｎまでの各レベルは，フィードバックのないシステムとして捉えることができるカットネットワークより設定されているので，ＤＰの基本原理である最適性の原理により，

$$f_1(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m)=g_1(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m)$$

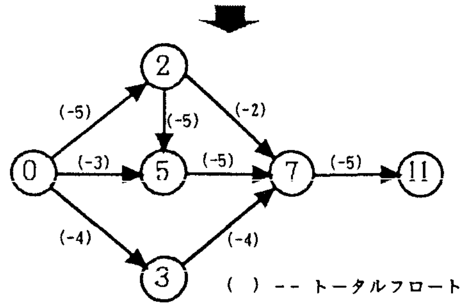
$$f_n(r^1,\ r^2,\ \cdots,\ r^m) = \min_{0\leq r_n^k\leq r^k\ (k=1,2,\cdots,m)} \{g_n(r_n^1,\ r_n^2,\cdots,\ r_n^m) + f_{n-1}(r^1-r_n^1,\ r^2-r_n^2,\ \cdots,\ r^m-r_n^m)\}$$

のような繰返しの関数方程式として定式化することができる．

以上のようにＣＰＭ型問題に対する新しい最適工程計画モデルを構築することができたので，図－13に示したプロジェクト完了時刻５０日の標準工程を５日短縮するような問題におけるリミットパスネットワークを対象として適用計算をおこなったところ，図－14のようなカットネットワークの最適経路と各ルートの短縮日数の最適配分結果が算出された．すなわち，以下のような最適短縮計画案を求めることができた．なお，ここでは本モデルの実行可能性を検証するために，費用曲線を線形で与えて適用計算を実施したが，本モデルがその解法にＤＰを適用していることから，一般形の費用曲線が与えられた場合にも同様に適用可能であることは明らかである．



対象工程ネットワーク(λ=50日)

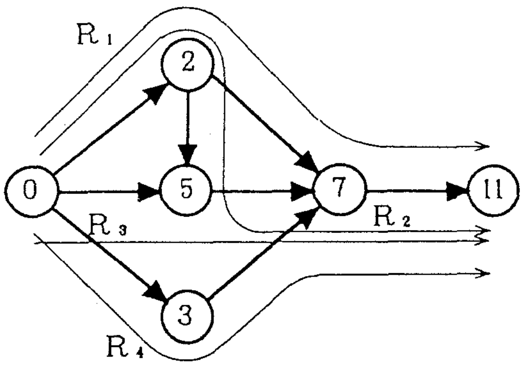


リミットパスネットワーク(α＝５日)

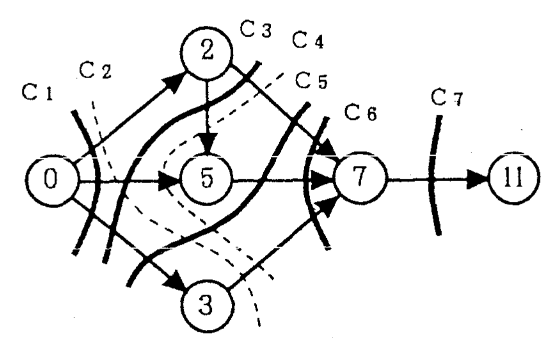
リミットパスネットワーク上の作業の費用データ

作業	施工数量 (m³)	標準 施工能力 (m³/日)	標準 所要日数 (日)	最大 施工能力 (m³/日)	特急 所要日数 (日)	費用勾配 (円/日)
(0, 2)	300	27.2	11	37.5	8	45.0
(0, 5)	450	20.5	22	25.0	17	60.0
(0, 3)	150	15.0	10	21.5	7	50.0
(2, 7)	400	20.0	20	23.5	17	50.0
(2, 5)	230	17.7	13	23.0	10	40.0
(5, 7)	280	28.0	10	40.0	7	35.0
(3, 7)	500	22.0	23	26.3	19	60.0
(7, 11)	300	18.7	16	23.0	13	160.0

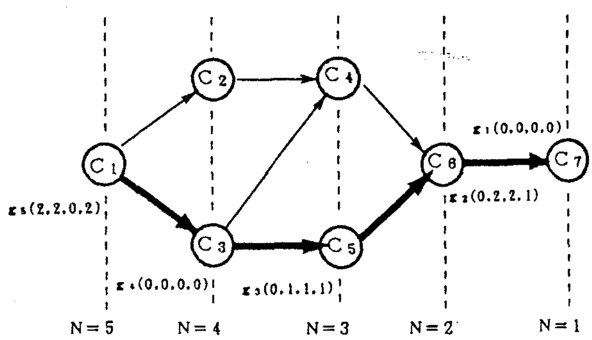
図－13　例題ネットワーク（CPM型）



ルート抽出結果



カット抽出結果



カットネットワーク

図－14　適用計算結果（CPM型）

$f_5(2,5,3,4)$

$$= f_1(0,0,0,0) + f_2(0,2,2,1) + f_3(0,1,1,1) + f_4(0,0,0,0) + f_5(2,2,0,2)$$

$$= 405 \quad (\text{万円})$$

各作業の短縮状況は

作業（０，２）で２日，作業（０，３）で３日

作業（３，７）で１日，作業（５，７）で３日

６．おわりに

本研究では，工程計画問題の解決をネットワーク工程表を用いて取扱う際のより優れた手法開発を念頭に置き，既存のＰＥＲＴ系手法が採用しているようなクリティカルパス解析を基礎とするアプローチではなく，ネットワーク工程表の構造特性に着目した新しいアプローチを展開した．すなわち，直列関係や並列関係をもつ作業の集合として求められるルート構造，カット構造に注目したネットワークの構造分析を実施するとともに，その関連構造を理論的に整理した．さらに，複数ルートを同時検討するためのカット間順序構造が，これらカットを構成する作業間の順序構造を保存しながらトポロジカルに構造化されることを明らかにして，この内容をベースとするカットネットワークの概念を導入した新しいスケジューリング理論について論述した．

また，この新しいスケジューリング理論に関する適用研究の事例として，ＰＥＲＴ／ＴＩＭＥ型，確率ＰＥＲＴ型，ＣＰＭ型等の工程計画問題に対するいくつかの最適工程計画モデルを構築し，その内容を定式化の段階を中心に論述した．

これらの研究成果をとおして，本稿で実施したようなネットワーク工程表の構造特性分析が工程計画のための理論開発や手法開発の分野において，非常に有効であることをかなりの程度明らかにできたものと考える．今後としては，本研究で論じたネットワーク構造特性の分析的研究の成果を応用して，ネットワークプランニングの分野へその適用範囲を拡大していくとともに，先述のＰＥＲＴ／ＴＩＭＥ型問題のモデリングの内容を発展させたＰＥＲＴ／ＭＡＮＰＯＷＥＲ問題の最適解法の開発研究に取り組んでいきたいと考えている．

【参考文献】

1) R.W.Conway,W.L.Maxwell,L.W.Miller: スケジューリングの理論，関根智明 監訳，日刊工業新聞社，pp.193-198,1971

2) 春名攻，山田幸一郎，滑川達：グラフ理論にもとづく経路探索問題に関する理論的研究，関西支部年次学術講演概要，1994,5．

3) 例えば（Ⅰ）Claude Berge :Theory of Graph and Its Application,Methuen & Co Ltd,1962

（Ⅱ）伊理正夫，古林隆；ＯＲライブラリー １２ ネットワーク理論，日科技連，1992,3．

4) 春名攻，山田幸一郎，滑川達： PERT/MANPOWER 問題の最適解法に関する開発研究，第１２回建設マネジメント問題に関する研究発表・討論会論文集，1994,12

5) 吉川和広：土木計画とＯＲ，丸善，pp.200-203,1969

6) 春名攻：建設工事における施工管理に関するシステム論的研究，京都大学学位論文，pp.36-39,1971

7) R.Bellman:Dynamic Programming, Princeton University Press,1957

8) 関根智明： PERT・CPM, 日科技連，pp.47-58,1975

9) 吉川和宏，春名攻：施工管理システムへの確立 PERT の導入に関する研究，土木学会論文報告集，第 179 号，1970

10) 吉川和宏，春名攻：前掲 9)

11) 関根智明：前掲 8),pp77-112

A Study on Theory for Analysis of Network Structural Characteristics and Development of Optimal Scheduling Models

In this study, mathematical method is developed for analizing network structural characteristics of network model for construction project. Applying this method, route structure and cut structure can be analyzed systematically through matrix calculation based on the theory of graph and network, and a concept of "Cut-Network" in which original network for construction planning is converted topologically from job-sequence structure into cut-sequence structure is reducted theoretically utilizing results of these analyses. Moreover, fruits of these studies are introduced to formulate several optimal scheduling models for large-scale construction project such as PERT/TIME, PERT/ESTIMATES and CPM.