

I-13 Voronoi 理論を用いた有限要素自動メッシュ生成法 Automatic Mesh Generation by Voronoi's Theory.

杉田尚男¹ 伊賀隆幸² 市ノ渡剛³ 鳥居邦夫⁴
Hisao SUGITA Takayuki IGA Tuyoshi ICHINOWATARI Kunio TORII

【妙録】有限要素法解析において、要素分割の結果は、有限要素の解の信頼性や解の収束性に大きな役割を持っている。そのために従来から、幾何学的に特色のある性質をもつ Voronoi 分割法が提案されている。本研究では、従来の応力集中部への要素分割に解析者の経験的な判断によって信頼性の優劣が生じることに着目し、自動メッシュ生成法にその判断プロセスの最適化手法を組み合わせることにより、応力集中部分に対して有効な要素分割法を提案する。

【Abstract】 It has been problematic to develop simple and practical automatic mesh generation techniques that can minimize the amount of required input data and can generate a lot of nodes. The necessary data include the specification of external boundary of the given domain and an internal node density distribution. In particular, for the application of automatic mesh generation to stress concentration area, simple computer algorithms for managing input and output data are necessitated. In many cases, the difficulty of the finite element analysis lies in the mesh generation which is free from errors in the mesh formation.

【キーワード】 ボロノイ, 応力集中, 有限要素法

【Key Words】 Voronoi, stress concentration, FEM

1. はじめに

コンピュータの飛躍的な性能の向上によって、有限要素法における解析モデルは大型化・複雑化してきている。そのために様々な自動メッシュ分割法が提案されているが、要素数・要素形状などにおいて、必ずしも最適化されたとは言い難い。特に応力集中部分に関する要素分割においては、未だ解析者の判断にゆだねる部分が多く、信頼性の低下を引き起こすことがあり、自動分割法のみでは対処仕切れていない。そのために要素数や計算時間も必要以上に多くなる傾向がある。従来のメッシュ生成法と最適化手法を組み合わせることが必要である。そこで本論文では、Voronoi 理論による自己修正型の自動メッシュ生成法を提案する。従来の応力集中部への要素分割に解析者の経験的な判断によって信頼性の優劣が生じることに着目し、自動メッシュ生成法にその判断のプロセスの最適化手法を組み合わせることにより、応力集中部分に対して有効な要素分割法を提案する。その手法は、著者らの考案した Voronoi 理論を用いた要素生成⁽¹⁾を行い、FEM 解析結果から応力勾配⁽²⁾を算出し、その応力勾配を利用して応力集中部の特定を行った後、要素の再分割を行うという3段

階より成り、解析対象の応力集中部分の評価とともに最適な要素分割を可能とするものである。

2. 虫食い理論

Voronoi 理論は、生態学の虫食い理論や、物理学、都市工学など、多くの応用分野を持つ代表的な領域分割法の一つであり、特に虫食い理論においては、要素の最適化に関して興味深い報告⁽³⁾がある。Voronoi 理論は、縄張りを持つ動物が、その生息地内で、あぶれを生じるほどに個体数が多い場合に、動物の縄張りの形としてその姿を見ることが出来る。もしも個体数密度が高くて、生息地内であぶれが生じるほどであれば、その生息地内には隙間なく縄張りが並ぶことになる。この場合には、隣同士の力の釣り合う縄張りの境界は、生息地を真上から2次元平面として見た場合、2つの縄張りの中心点間の垂直2等分線で表される。このような垂直2等分線で仕切られる、最小の多角形が Voronoi 多角形である。この多角形は、他のどの縄張りの中心からも、その縄張り自身の中心に近い点の集合である。例えば、互いに力量に差のない縄張り性動物 N 個体を同時に有限域の平面生息地にランダムにいれると、初期状態においては

¹ 八戸工業高等専門学校 建設環境工学科 (〒 039-1192 青森県八戸市田面木上野平 16-1 TEL:0178-27-7313)

² 岩手大学 工学部 (〒 020-8551 岩手県盛岡市上田 4-3-5)

³ (株) 横河技術情報 情報開発部 (〒 273-0026 千葉県船橋市山野町 27)

⁴ 長岡技術科学大学 建設系 (〒 940-2137 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

バラバラな縄張りが形成されるが、次第にそれぞれの個体はその縄張りの中心位置を調整しながら、自身の縄張りを確立していく。(図1参照)そこで、A点に吸引力となる餌を与えると、縄張り性動物が一斉に餌場Aへ移動を始め、縄張りを再編成する。また2地点A、Bに餌場を設けると、それぞれの個体は近い方の餌場へ移動することとなる。本論文は、有限要素解析において応力集中部分を再分割する現象と、この動物の縄張りの再編成のアナロジに注目するものである。すなわち、吸引力となる応力値を基に要素を再配置し、再び解析するという収束計算を通じて、要素のより良い配置法について検討しようとするものである。その手法は、著者らの考案したVoronoi理論を用いた要素生成^(1,4)を行い応力勾配を算出し、その応力勾配を利用して応力集中部の特定を行った後、要素の再分割を行うという3段階より成り、解析対象の応力集中部分の評価とともに最適な要素分割を可能とするものである。

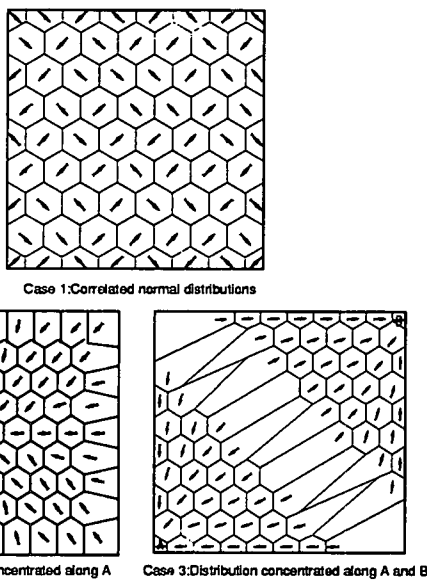


Fig.1 ex. Territories of *Tilapia mossambica*

3. Voronoi 理論

Voronoi 理論^(5,6)の概略を説明する。

N 次元 Euclid 空間において、 n 個の点 $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_n(x_n)$ が存在するとき、点 $P_i(x_i)$ に対して最も近い点

の集合 V_i は式(1)で与えることができる。

$$V_i = \bigcap_{j:j \neq i} \{x \in R^N \mid \|x - x_i\| < \|x - x_j\|\} \quad (1)$$

$$(i = 0, \dots, n, j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

x : ある位置ベクトル x_i : 母点 i の位置ベクトル

$\|\cdot\|$: Euclid 距離

V_i は点 $P_i(x_i)$ の Voronoi 領域と呼ばれ、連続的に点の数だけその領域を確保する。一領域を分割した図を Voronoi 図(図2参照)、Voronoi 領域を生成している点を母点、その領域多角形の各頂点を Voronoi 点と呼ぶ。

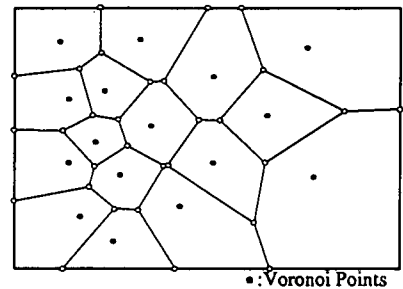


Fig.2 ex. Voronoi diagram

2次元で分割された各 Voronoi 多角形の間には(1)Voronoi 多角形は母点間で等領域分割されるので凸多角形となる、(2)Voronoi 点は、その周りの3個の母点を頂点とする三角形の外心である、という幾何学的特徴が見られる(図3参照)。

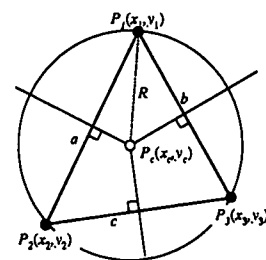


Fig.3 P_1, P_2, P_3 are the Voronoi points of the generator points P_c

応力解析には、この凸多角形の各頂点(これ以後この凸多面体の各頂点を Voronoi 節点とする)と、母点 P_i とを結ぶことにより三角形要素を形成しそれを用いる。

4. 初期要素生成

4.1 入力データ

入力するデータは、(1)解析領域全体を覆う長方形領域2辺の長さ、(2)仮想母点数(詳細は4.2で述べる)、

(3) 境界近似に関する情報とし、最小限のデータのみで要素分割を行う。

4.2 仮想母点による格子状配置

初期配置における FEM 解析の精度向上や計算時間の短縮には、母点の配置状態、つまり Voronoi 領域を分割したあとの三角形要素の形状、要素数が重要な点となる。

ここで、母点を正三角形格子状に配置すれば、その Voronoi 領域は正六角形となり、Voronoi 領域を分割して得られる要素は正三角形となる。

このことに着目し、母点を正三角形格子状に配置するための方法として、仮想母点による配置法を考案した。

4.1 で入力された仮想母点数 vp_{input} と、正三角形の定義 (図 4 参照) から、式 (2) が導かれる。

$$\left(\frac{x}{dx} + 1\right) \left(\frac{y}{dy} + 1\right) = vp_{input} \quad (2)$$

x, y : 各方向の長さ

dx, dy : 各方向の分割幅

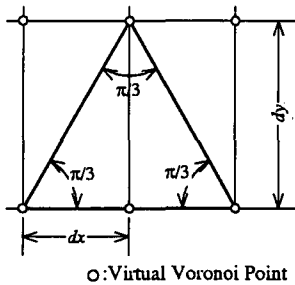


Fig. 4 Geometrical method to obtain the Virtual Voronoi points.

これを展開して、式 (3) を得る。

$$\{(1 - vp_{input}) \tan \pi/3\} dx^2 + (x \tan \pi/3 + y) dx + xy = 0 \quad (3)$$

式 (3) を用いて、 x 方向、 y 方向の分割幅 (dx, dy) を求める。分割幅から、各方向の分割数を計算し、これを整数化する。以上のようにして求めた分割数と分割幅を乗じたものと、各辺との誤差が 1% 以内に収束しているかどうか判定し、収束していなければ仮想母点数を増やし、分割幅を計算し直す。収束していた場合には、分割幅と分割数を用いて、母点を三角形格子状に配置する (図 5, 図 6 参照)。

この方法を用いることにより、要素は正三角形となり安定した形状を得ることができる。また、正三角形格子で母点を配置するためには、ある程度の母点数を

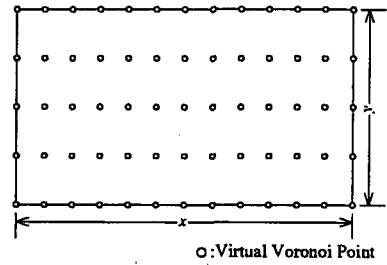


Fig.5 Arrangement of Virtual Voronoi Points

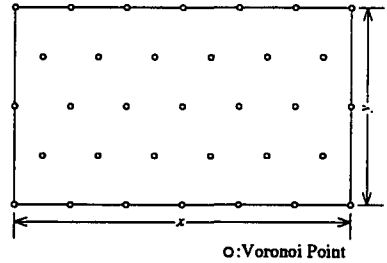


Fig.6 Arrangement of Voronoi Points

必要とするため、要素数が少なくなりすぎるのを防ぐことができる。

4.3 境界近似

Voronoi 節点は母点から生成されるので、境界近似を行う場合においても、母点を移動させるだけでよい。

境界近似を行う場合、その境界線に関しての移動領域を設定する。その移動領域内の母点を境界線上に移動させ、境界外の母点を消去する。

移動領域は境界線の $\pm V_l/2$ とする。ここで V_l は 4.2 における母点間隔である。この移動領域内の母点から、境界線に対して垂線をおろし、その交点を母点の移動後の座標とする (図 7 参照)。

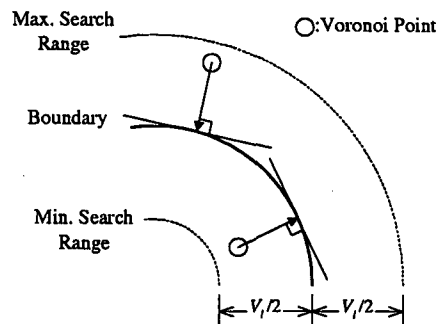


Fig.7 Boundary approximation by Voronoi points.

しかし、移動領域内の母点の移動を行った際、移動領域付近では格子状の母点配置が大きく崩れてしまうことがある。このような場合、Voronoi 領域もいびつな形状になりやすい。

そこでゆがみを修正するための方法として、ラブラシアン法⁽⁷⁾を用いた。この手法は、ある母点の座標値を、その母点と隣接する全ての母点によって形成される多角形の重心位置に移動するものである。

この方法を用いるために母点による三角形分割を行い、隣接する母点のデータを与え、それにラブラシアン法によるスムージングを適用している。スムージングを行うことで、母点配置が正三角形に近づき、いびつな Voronoi 領域の生成を防ぐことができる。

4.4 要素生成

母点の配置を決定した後、Voronoi 節点の生成を行う。Voronoi 節点は、Voronoi 理論の幾何学的特徴に基づき、着目母点により作られる外接円の中心に配置する。ただし、この外接円の内部には、他の母点を含んではならない⁽⁸⁾。

これらの特徴から、着目母点で作られる外接円の半径が、最小のもの組み合わせを検索すればよいことがわかる。そのような母点の組み合わせを検索し、外接円の中心に Voronoi 節点を配置する。

外接円の半径 R は、式(4)により求める。

$$R = \frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (4)$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

a, b, c : 三角形の各辺の長さ

最小半径となる母点の組み合わせを検索した後、外接円の中心座標 (x_c, y_c) を式(5)により求める。

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{1}{2} \{ (x_1 + x_3) + \alpha(y_3 - y_1) \} \\ y_c &= \frac{1}{2} \{ (y_1 + y_3) + \alpha(x_1 - x_3) \} \\ \alpha &= \frac{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

x_i, y_i : 3 母点の座標値 (図 3 参照)

全ての Voronoi 節点の生成が終了した後、母点と Voronoi 節点とを、有限要素節点へと置き換える。その後、母点とその Voronoi 領域を構成している節点とを結び、三角形のデータを作成する。最後に、母点と Voronoi 節点による三角形を有限要素節点データに置き換え、要素を生成する (図 8 参照)。

領域の分割法にはデローニー法などの数々の分割法があるが、分割後の処理の効率を考え、Voronoi 理論を

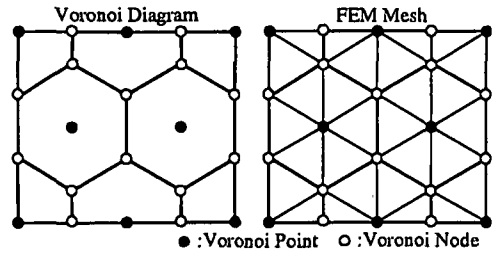


Fig. 8 Transformation of Voronoi diagram to FEM mesh.

用いた。具体的には、Voronoi 理論による母点に分割後の接続する節点情報・要素情報を加え、節点の再配置を極力早くするためである。

5. 応力集中部の特定

本研究では、要素応力値の不連続性の大きい部分には、応力集中が著しいという考え方を基本としている。この指標として応力勾配を用いた。

しかし、応力勾配を要素ごとに算定したのでは、非効率的であるため、応力勾配についても、Voronoi 理論を応用して算出している。

そして算出した応力勾配を基に母点、節点の移動を行う。

5.1 領域間応力勾配

Voronoi 理論の応用として、Voronoi 領域間の応力勾配の算出を行った。

解析結果は、それぞれの要素の応力として出力されるため、Voronoi 領域ごとの応力の推定を行う必要がある。Voronoi 領域の応力は、その Voronoi 領域を構成している要素の平均値とした。Voronoi 領域の応力として、要素の重み付き平均を用いる方法、領域内要素の最大応力を代表値とする方法などについて検討を行ったが、平均応力を用いた場合が良好な結果を示すため、この方法を用いた。

そして領域間応力勾配 SG_{ij} は、 i を着目する Voronoi 領域、 j を i に隣接している Voronoi 領域とし、次の式(6)により算出した (図 9 参照)。

$$SG_{ij} = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{d_{ij}} \quad (6)$$

σ_i, σ_j : i, j の Voronoi 領域の応力

d_{ij} : i, j の母点間距離

これを、着目領域に隣接する領域全てについて算出する。そしてその平均値 $\overline{SG_{ij}}$ を、応力勾配の代表値とする。以降この代表値を領域間応力勾配と呼ぶ。

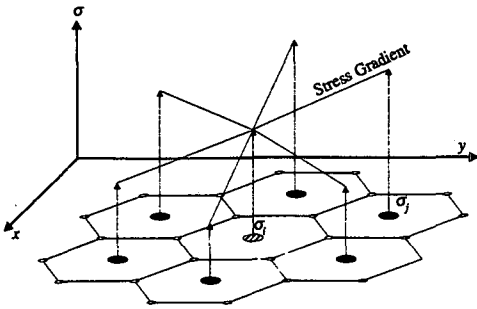


Fig.9 Stress Gradient between Voronoi regions

5.2 領域内応力勾配

領域間応力勾配だけでは、平均値を代表値としているために、正の勾配と負の勾配の絶対値がほぼ等しいような場合には相殺されてしまい、過小に評価される場合がある。

また、Voronoi 領域の応力として平均値を用いているので、Voronoi 領域内の局所的な応力の変化が評価できない。

そこで、Voronoi 領域内における応力の不連続量を表すために、領域内で最大応力をとる要素と最小応力をとる要素間で応力勾配 sg_i を式 (7) により算定した (図 10 参照)。

$$sg_i = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{d} \quad (7)$$

$\sigma_{max}, \sigma_{min}$: 最大応力, 最小応力の要素
 d : 要素の重心点間距離

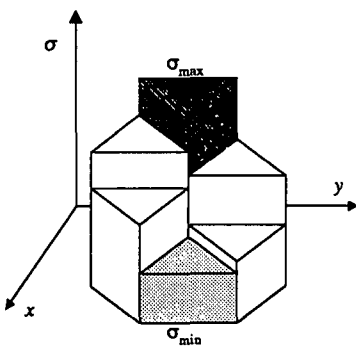


Fig.10 Stress Gradient between elements in Voronoi region

以後、この応力勾配を領域内応力勾配と呼ぶ。

6. 要素再分割

以上のようにして応力集中部と特定した点を中心に、要素を細分化することで、離散化の誤差を小さくする。Voronoi 分割による母点を移動し応力集中部に密に配置

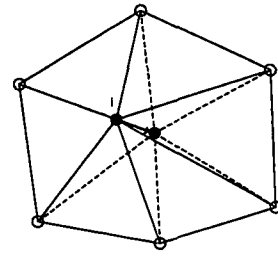


Fig.11 Determin new node i

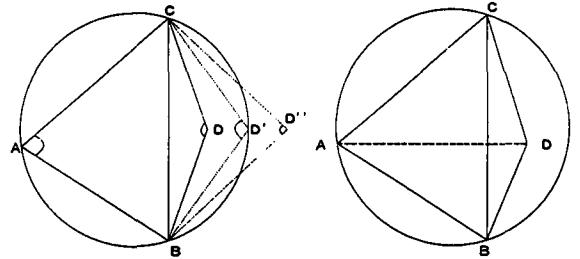


Fig.12 Modification of element

することでこれが可能となる。要素を再定義することにより要素がいびつになることは拒めない。そこで節点移動を通して要素の形状最適化を行う。(図 11, 図 12 参照)

7. 収束判定

再定義した要素で再び有限要素解析を行い、そこで得られた最大応力値とその前の要素定義で求め最大応力値の比較により収束判定を行う。具体的には、式 (8) により算定する。

$$\frac{\sigma_{1max} - \sigma_{2max}}{\sigma_{1max}} \cdot 100 < 5\% \quad (8)$$

σ_{1max} : 再定義後の最大応力値
 σ_{2max} : 再定義前の最大応力値

収束を満足しない場合は、要素を再分割する。分割パターンは、分割要素の周辺にある要素の細分割要素数で決まる。この手法は、要素数を効率的に増やす上で非常に有効である。(図 13 参照)

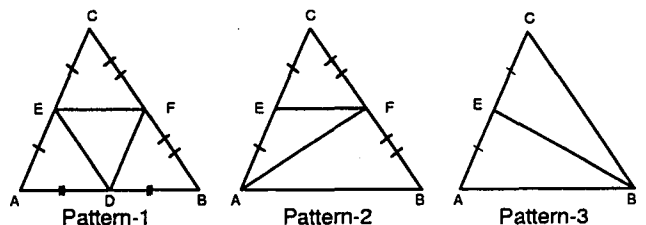


Fig.13 Patterns of refinement of mesh

8. 適用例

応力集中が顕著に発生する有孔平板モデル (図 14 参照) を用い、本手法の効果を検証する。モデルの諸元は、ヤング係数 $E = 2.06 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 板厚 10mm , 高さ $h = 100\text{mm}$, 幅 $b = 50\text{mm}$, 円孔半径 $r = 25\text{mm}$, 引張力 $q = 4\text{kN}$ とした。

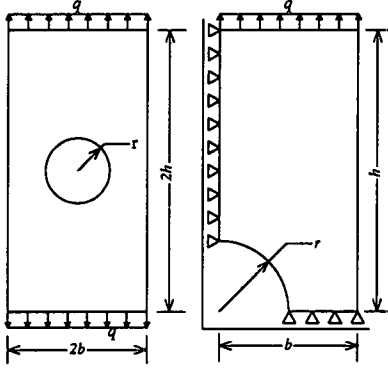


Fig.14 Analysis model of thin plate with hole and 1/4 model

再分割後の Voronoi 図と要素配置図を図 15 に示す。

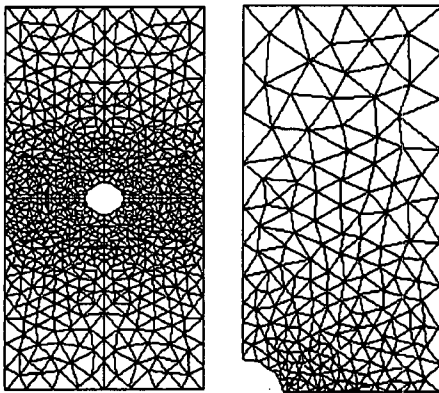


Fig.15 Optimum Voronoi diagram and mesh

図 16 は、応力集中係数 K_t を求めるのに要した要素数を表している。一般的な手法と比較して少ない要素数で収束している。

円孔半径を変化させ、応力集中係数を算出し、理論値⁽²⁾と比較した結果を図 17 に示す。

9. 結言

一般的な要素分割法では、解析者の経験的な判断によって解の信頼性の優劣が生じていたが、本手法を用いることにより、応力集中部分に対して最適なメッシュ分割が得られる。また、Voronoi 理論の応用により扱うデータを大幅に減らすことが可能となった。

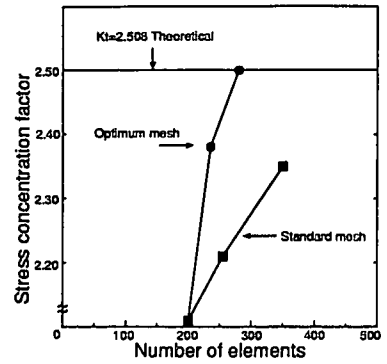


Fig.16 Comparison of results by optimum and standard mesh

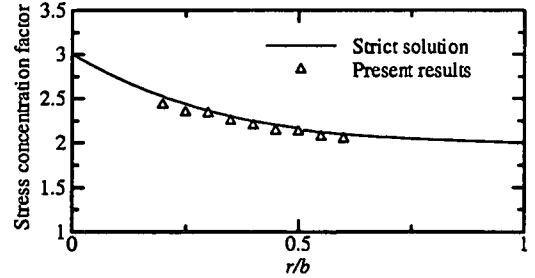


Fig.17 Graph of Stress concentration factor

参考文献

- (1) 杉田尚男, 市ノ渡剛, 鳥居邦夫, FEM 解析における高速要素自動分割, 鋼構造シンポジウム論文集, 11, 1998, pp. 305-310.
- (2) 西田正孝, 応力集中, 森北出版, 1967.
- (3) 長谷川雅美, なわばりはこうして決まる, 科学朝日 11, nov, 1986, P36.
- (4) 杉田尚男, 鳥居邦夫, Voronoi 理論を用いた要素高速自動分割法, 第 53 回土木学会年次学術講演会講演概要集, I-A232, 1998, pp. 464-467.
- (5) Takao Ohya, Masao Iri and Kazuo Murata, Improvements of the Incremental Method for the Voronoi Diagram with Computational Comparison of Various Algorithms, Journal of the Operations Research, Vol.27, No.4, 1984.
- (6) 杉原厚吉, ボロノイ図を通してみると, 数学セミナー, 6, 1996, pp. 72-75.
- (7) 谷口健男, FEM のための要素自動分割—デローニー三角分割法の利用—, 森北出版, 1992.
- (8) 杉田尚男, 市ノ渡剛, 鳥居邦夫, 最大空円理論を用いた有限要素自動メッシュ生成法, 計算工学会講演論文集, Vol.3, No.2, 1998, pp. 407-408.