I－11　地域開発プロジェクト計画におけるスケジューリング問題に関する研究

A Study on Scheduling Problem at Regional Comprehensive Development Planning

春 名　攻*　　　竹 林 幹 雄**
Mamoru Haruna　　　Mikio Takebayashi

【抄録】本研究は各事業の規模・効果が既知であり，なおかつ事業実施には予算・事業の開始のための種々の制約条件が存在するという状況の下で，事業実施スケジュールの最適化を問題として，それを効果的に解くためのアルゴリズムについて検討を行う．特に，各プロジェクト間の順序制約に加えて，プロジェクト費用の増加を考慮した予算制約についても検討した．そして，解法アルゴリズムとして，春名・滑川の提案したネットワーク型資源配分問題の解法アルゴリズムを応用し，最適なプロジェクト実施計画を求める方法を提案した．最後に，数値計算例を通して，本解法の適用性について実証的に検討し，その結果，本解法の有用性が確かめられた．

【Abstract】This Study discusses the scheduling problem at the regional comprehensive development planning under the situation that the scale of all project and effect by every project is already given, and some restricts and constraints such as budget restriction, sequence of projects, and so on. And the solution algorithm for that problem is also discussed. Particularly, the annual budget constraint for development under the condition that cost for each project is annually increased is concerned. In this study, the solution algorithm which is the application of Haruna & Namerikawa's solution algorithm for resource allocation problem on the network is discussed, then the mathematical method for optimal project schedule is shown. After all, through the numerical examination, the ability of this algorithm is discussed, and thus it is understood that this algorithm is well for that problem under the computation.

【キーワード】スケジューリング問題，ネットワーク型資源配分問題，整数計画法，予算制約

【Keywords】Scheduling Problem, Resource Allocation Problem on the Network, Integer Programming, Budget Constraint

1．序論

開発事業を行う場合，事業を確実に実施するためには，まず各事業の実施に必要な費用を負担することが可能で，同時に建設資材，労働力，輸送手段の確保など種々の条件を満たさなければならない．しかし，これらは時間ごとに変動することが考えられ，特に開発そのもので条件を満足するか否かと言った状態が変化することが考えられる．

こういったことから，時間ごとに変化する状態に基づき，事業の実現性を確保することが必要である．同時にこのことは，各事業をどのような順序で実行すれば，最も合理的な開発となるかといった「スケジュール問題」を検討することと同義であり，この「最適スケジュールの導出」の重要性は事業の実現性・効率性を検討する上で極めて重要であると考えられる．しかし，今日までこういった問題を取り扱う上で，効果的でなおかつ最適性の保証された解法は少ないと考えられる．

本研究では，各事業の規模・効果が既知であり，なおかつ事業実施には予算・事業の開始のための種々の制約条件（非線形なものを含む）が存在するという状況の下で，事業実施スケジュールの最適化を問題として，それを効果的に解くためのアルゴリズムについて検討を行う．

2．問題構成と定式化

今，N 個のプロジェクトからなるプロジェクト・ネットワークについて考える．このネットワークでは，

①プロジェクトの実施に先行・後続関係を有するものが存在する．

②プロジェクトの実施に際して種々の資源制約が存在する．

という状態を想定する．さらに，資源制約に関しては

③前段階で開始あるいは終了したプロジェクトに無関係に与えられる資源制約

*　立命館大学理工学部（〒525 草津市野路町 1916）TEL 0775-61-2736 E-mail:ritsharu@ro.bekkoame.or.jp
**　神戸大学工学部（〒657 神戸市灘区六甲台町 1-1）TEL 078-803-1016 E-mail:takebaya@kobe-u.ac.jp

④前段階で開始あるいは終了したプロジェクトに左右されて変化する資源制約

が，考えられる．上記の資源制約にはさらに実施される時期に依存する時間依存型のものも考えられる．

以上のように考えると，プロジェクト・ネットワークの各ノードにおける状態は，実施されるプロジェクトの順序に左右され，終了時間やプロジェクト終了時点までに投下される資源の総量も大きく異なると考えられる．このようなプロジェクト・ネットワークを効果的に運営することを数学モデルを用いて考えることとする．

プロジェクト全体の目的を Z とする．Z は多目的で計測される汎関数・ないしは多目的関数であるとする．

Z を単独の項目 j に関して関数表記し，次のように表記されるものとする．すなわち，

$$Obj: Maximize \qquad Z_j(\sum_i E_i^{\,j}) \quad (1)$$

となる．

次に，各プロジェクトについての制約条件を以下のように表すこととする．すなわち，

$$\sum_i \delta_i^t f(i)(1+\rho)^t \le F_t \quad (2)$$

$$if \quad S(i,t)=1 \quad then \quad \sum_{t=1}^{t-1}\sum_{i'(\ne i)} E_{i'}^{\,j}(t) \ge ESV_i^{\,j} \quad (3)$$

$$if \quad S(i,t)=1 \quad then \quad \sum_{t=1}^{t+T_i}\sum_{i'(\ne i)} E_{i'}^{\,j}(t) \ge EEV_i^{\,j} \quad (4)$$

$$\sum_i\sum_m L_i^m(t) \le L(t) \quad (5)$$

ここで式(2)は各期における予算制約，式(3)，式(4)はそれぞれプロジェクトの開始時期における実施効果の累積量，終了時点での実施効果の累積量に関する制約条件を表す．また式(5)は各種資源供給量に関する制約条件式である．

以下に，各変数の定義を示す．

i: プロジェクトの種類を表すインデックス，j: 実施効果の種類を表すインデックス，t: 年度，ρ: 物価上昇率(年率)，E_i^j: プロジェクト i による実施効果 j の実現量，$f(i)$: プロジェクト i の単年度プロジェクト費用，F_t: 第 t 期の総事業予算の最大値，$E_i^j(t)$: プロジェクト i による実施効果 j の第 t 年度における実現量，$S(i,j)$: プロジェクト i が第 t 年度に開始される場合 1,それ以外は 0 を取る判別関数，ESV_i^j: プロジェクト i を第 t 年度までに開始するために前年度までに累積していなければならない実施効果 j の累積量，EEV_i^j: プロジェクト i を第 t 年度までに開始するために i の終了期までに累積していなければならない実施効果 j の累積量，T_i: プロジェクト i の工事期間(プロジェクト期間)，$L_i^m(t)$: 第 t 年度におけるプロジェクト i への資源 m の投下数(量)，$L(t)$: 第 t 年度における最大資源供給量である．

以上のように，全ての条件式が時間に依存する形で設定される．ここで示されたような問題の最適化に関しては，後述するようにその適用範囲の広さにも関わらずその具体的解法アルゴリズムはほとんど開発されていないといえる．次章では具体的な解法アルゴリズムについて検討を行う．

3. 解法

(1) 解法の指針

ここで，各期の工事費用を中心とするプロジェクト実施のための費用 $f(i)$について考える．物価の上昇が長期にわたって生じる場合，期 t を経るごとにプロジェクト費用 $f(i)(1+\rho)^t$ は増加する．関連するプロジェクトの実施期間に不必要な空白期間が存在した場合，その間無意味なプロジェクト費用の増大が生じ，投資効率は低下する．すなわち，関連したプロジェクトの実施期間を可能な限り接近させ，計画年数の短縮を図ることが，各プロジェクト実施を効果的に行うことと同義になる．そして，実行可能解の集合から目的(費用最小化など)に対して最適な組み合わせを抽出することで，最適解を得ることが可能となる．

以上の考察から，本モデルを使って次に示す方法により最適化することを提案する．なお，ここでは実施効果の現出においてはプロジェクトが終了するまで現れないとし，プロジェクトは分割可能な場合も含むものとする．

(2) ネットワーク型資源配分問題としての解法

ここでは春名・滑川 [1]によって開発されたネットワーク型資源配分問題の解法を応用することにより，本問題の最適化が図れることを示す．

春名・滑川 [1]の解法は工程管理計画 [2),3)]におけるスケジュール問題について，次のような手法を開発した．すなわち，工事施工の工程計画を工程ネットワーク上の資源配分問題としてとらえた．そして，そのネットワーク上に現れる作業をルートに分解し，それを利用して作業が同時に行うことのできる集合を表すために「カット」を生

成する方法を開発している．このカットは，プロジェクト間の先行・後続関係を示した作業ネットワークについて，「始点から終点までの全てのルートをただ1度切断する」場合に生じる作業集合である [1]．そして，全ての作業とその順序関係によって表されるもとの工程ネットワークを，カットの連続した「カットネットワーク」によって改めて表現し，そして PERT/TIME 型問題においては共通した作業が続く期間（すなわちカット）の和を最小化することと，工程期間の最小化を実現することが一致することを示し，CPM 型の工事費用の最小化問題の新しい解法を開発している [1]．また，同時に資源制約型の工程管理問題である PERT/MANPOWER 型問題においては，カットをその作業断面にまで分解し，各カット内の所要時間が最小化されるようにして，最適なスケジュールを求める方法も開発している [4]．

本研究ではこの方法を，各期における予算制約を持った場合にも適用できるように，ここではまず以下のように解法の手順に変更を加えた．

(i)カットネットワークの生成

まず，解法の基礎となっているカットネットワークについて述べる．

カットは，作業の前後関係を完全に保存しているため，カットによって構成されるカットネットワークは，作業（あるいはプロジェクト）を同時に実行される作業群のネットワークとして整理したものということになる．以下にその手順の概略を記す [1]．

今，カットネットワーク上に $n=0,1,\cdots,N$ のレベルをもったカットネットワークがあり，その各ルートの実施状況を

$$R_n^{Cm} = \{r_n^{Cm}(l)\} \qquad (6)$$

という状態変数で表すとする．ここで R_n^{Cm}:第 n レベルのカットで $n+1$ レベルのカット C_m と順序関係を有するカットに属するルートの状態を示す状態変数．$r_n^{Cm}(l)$: 第 n レベルのカットで $n+1$ レベルのカット C_m と順序関係を有するカットに属するルート l の実施日数を表す．

次に決定変数を各レベルのカットへの配分日数とし，これを求める．任意のレベル n で $n+1$ のレベルのカット Cm と順序関係を有するカット Cm' における状態変数 R_n^{Cm} のもとでこのカットに配分される日数を $g_n^{Cm}(R_n^{Cm})$とする．この値は Cm'に含まれ，かつ Cm に含まれない作業により決定される．ゆえに

$$g_n^{C_m}(R_n) = \max\left(\frac{\sum_l a_l^{ij} r_n(l)}{\sum_l a_l^{ij}} - \delta_{ij}^{Cm''} g_{n-1}^{C_{m'}}(R_{n-1}^{Cm'})\right) \qquad (7)$$

となる．ここで a_l^{ij}:ネットワーク工程表より作成したルート行列の構成要素，$\delta_{ij}^{cm''}$:クロネッカーデルタで作業(i,j)が Cm''(n-1 レベル)に含まれているとき1，その他は0をとる．さらに全てのレベルを通して各ルートの総実施状況パターン $TR(N)$を以下のように表す．

$$TR(N) = (r^1,\cdots,r^l,\cdots,r^L) \qquad (8)$$

ここでN:カットネットワーク上に存在するレベルの総数，r^l:ルート l の総実施日数．

以上のように考えると，プロジェクトの完了時刻 $E(N)$は各カットの配分日数の総和の最小化問題としてとらえることができ，さらに動的計画法を用いて本問題の最適解を求めることができる [1]．

さて対象としている問題では，プロジェクトの前後関係が固定化されているので，全プロジェクトの実施スケジュールはカットネットワークの形状に表すことが可能である．すなわち，ここでは各カットに配分される作業の集合を作り出す．しかし，この時点ではプロジェクトの実施において予算制約を満たした状態であるという保証はない．

(ii)整数計画法の応用

現在カットに配分されている区間長を T_t とする．カットに含まれているプロジェクトは全て開始時期と終了時期の2つの値を有することになる．同一カット内に存在するプロジェクトの数を Q とすると，作業断面は最大 $Q+1$ 存在することになる．このときプロジェクト i が計画初年度より t 年経過した時点で行われている場合を 1，その他を0とするバイナリ行列 B_{ij}(Q×Q行列)が与えられる．同時にその費用行列を C_{ij} (Q×Q 行列)とする．このとき，カット内の各年次の費用の総計は

$$C_{C'_m} = \sum_i B_{it} C_{it} \le F_t \qquad (9)$$

として表現される．これを制約条件として，以下のカット内に配分される時間 X_{cm} の最小化問題を考える．

$$X_{C_m} = \min(\sum_u x_u) \qquad (10)$$

ここで，x_u はカット C_m 内にある作業期間 u の時間を表す．

これは以下のような線形計画法により解を求めることが

可能であることが知られている[4].

これはまず，ある実行可能な状態から，その作業断面行列(ある作業 i が期間 u で実施されていれば1をとる行列) M とその際の各期の長さを表すベクトル $\{x_u\}$ を得ているとする．このとき，1期間中のプロジェクト実施数はカットの中に存在するプロジェクトの数 Q であるので，

$$yM = \{1,1,1,\cdots,1\} \qquad (11)$$

となるベクトル y を確定する．次に

$$\sum_u b_u y_u > 1 \qquad (12)$$

の制約のもとで，

$$\sum_u b_u \leq Q \qquad (13)$$

となる最大の正の整数の組み合わせを求める．このとき，短縮される期間の長さと，それに該当するプロジェクトの組み合わせを得る．プロジェクトの組み合わせのベクトル $\{b_u\}$ を得る．

次にこれと対応して短縮される期間長を示す列ベクトルを確定する．

改変された M に関して

$$Md = [b_1, b_2, \cdots, b_U] \qquad (14)$$

を満たす列ベクトル $\boldsymbol{d}$ を得る．この $\boldsymbol{d}$ の要素に対し，現在の各期の長さを示した x_u の同じ列の値を除した値を比較し，最小値を与える列に着目し $\{b_u\}$ と入れ替える．

春名・滑川[4]の方法ではこのような行列変形を繰り返すカッティング・ストック問題[5]を解くことにより，最短のカット内時間が求まり，カットネットワーク上で動的計画法を適用することにより，最終的に最適解を得ることができるとされている．

(3)列生成法の改良

(i)制約条件を満たす解集合の確定

しかし，本研究で取り上げているように，実行可能なプロジェクト費用が年毎に上昇し，事業予算の上限が一定のような制約下では，この解法で最適化を行っていくことは難しい．それは改変されたプロジェクトの実施スケジュールにおいて，1事業期間内であっても年次の予算制約を満たしているとは限らない場合が存在するからである．

上記の問題は，各制約条件が作業断面では完全に把握できないことに起因する．ゆえに，本研究ではこれらを年次断面にまで分解して検討を加えることとする．

第 C_m カットにおいて同時に実施できるプロジェクト数を $q(1 \leqq q \leqq Q)$ とし，そのカット内での割り当て時間を X'_{Cm} とすると，各作業断面における配分時間 $x_u(1 \leqq u \leqq Q)$ の和の最小化問題(10)を解く際に，q の最大値 Q より順にカッティングストック問題を解く．このとき，資源制約 q を満たす解のパターンを $\boldsymbol{b'}_u$ とする．この $\boldsymbol{b'}_u$ は短縮時間順に求めることが可能である．

第2段階として，この列ベクトルの組み合わせが，予算制約などの制約条件を満たしているかどうかを調べる．

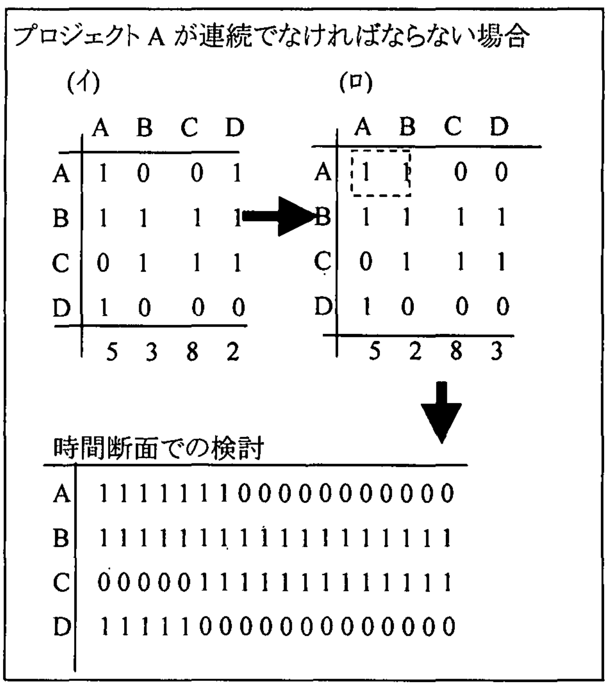
まず列の配列は次の条件を満たすように再配列される．

ｱ)分割不能なプロジェクトは連続するように配列する．

ｲ)予算制約などの制約条件を満たすように配列する．

これらは分肢限定法を適用することで求めることが可能である．配列の1例を図－1に示す．

図－1に示すようにまず，プロジェクトの連続性を検討し，次に各時間断面における制約条件を検討する．このとき，図－1の(ｲ)および(ﾛ)の状態は「プロジェクト断面」を示すものである．(ｲ)の状態では各列の順序関係は全くない，並列の状態である．ここでプロジェクトの接続関係を検討すると，プロジェクト A が必ず連続しなければならないという条件を与えているので，それを満たすような順序を与えなければならない．このとき，図－1に示された順序(ﾛ)は1例であり，他に5通り存在する．



図－1 カット内におけるスケジュールの1例

この6例について

①前のカットからの作業の連続性の検討

②各年度断面(ハ)についての制約条件の検討

を行い，さらに目的関数(1)を最大化(あるいは最小化)する組み合わせを抽出する.

以上で求められたプロジェクトの実行順序で，満足する組み合わせが1つも存在しない場合は，先の b'_u に戻って，次の組み合わせの検討に移る. 1つでも存在する場合は，短縮時間順に解の組み合わせを抽出しているため，この解がカットに配分される時間の最短のスケジュールを実現する実行可能解であることになる.

(ii) 動的計画法によるカットネットワークの最適経路探索

このとき，このカットに連続するカットを C_{m+1} とする. C_{m+1} が始まるまでの最短時間は，それに接続するプロジェクト P_i の終了時期に左右される. この P_i が終了する時期を C_m が始まってからの時間で $X_{Cm''}$ と表すとする. この $X_{Cm''}$ が実際にカット C_m に配分される時間である. このとき，まだ終了しないプロジェクト(これを $P_{i''}$ とする)がある場合，その残り時間は $P_{i''}$ に必要な時間を $XT(P_{i''})$ とすると，

$$REST\_XT(P_{i''}) = XT(P_{i''}) - (X_{C_{m''}} - T_{begin}(P_{i''})) \qquad (15)$$

となる. ただし，$REST\_XT(P_{i''})$: 作業時間の残量，$T_{begin}(P_{i''})$: プロジェクト i"が始まった時期，である. このプロジェクトの続きは，次のカット以降で行われることになる.

以上のプロセスを矛盾なく最終カットまで行う. このようにして得られたカットネットワークに動的計画法を適用する [4]ことでことで，最適なスケジュール構成が各カットでの作業の合成として表現することが可能となる.

5. 複数プロジェクトを対象とした数値計算例

前章までに述べてきたプロジェクト・ネットワークの特性は，地域開発計画を策定・立案される場合にも現出する. 特に，物価の上昇による工事費用の増加，あるいは労働力の確保など，先に述べた資源制約に類する状況を見ることができる. ここでは，表－1～3に示すような開発計画を念頭に置いた例題を解くことで，前章に示したアルゴリズムの有効性を検証することとする.

各プロジェクトの単価は計画初年度で評価された値を用い，年率 1%で費用が上昇するものと仮定している.

表－1 数値計算に使用したプロジェクトの概略

ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ	単価	労働力	事業期間
1	20	15	10
2	25	20	15
3	2	5	6
4	10	6	2
5	15	8	4
6	2	5	3
7	4	18	3
8	4	5	3
9	6	7	7
10	5	2	2
11	2	3	1
12	3	7	5
13	3	7	6
14	4	5	5

表－2 整備効果

ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ	昼間人口増加数
1	0
2	0
3	8
4	10
5	20
6	0
7	0
8	12
9	10
10	15
11	17
12	0
13	0
14	0

表－3 先行条件

ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ	先行条件
1	なし
2	なし
3	なし
4	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ1が終了
5	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ 2 が終了
6	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ 3,4,5 が終了
7	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ 2 が終了
8	なし
9	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ 4 が終了
10	なし
11	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ1が終了
12	なし
13	なし
14	ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ 6,7,8,11 が終了

また，労働力，事業期間も固定的に与えられるものとして設定している．すなわち，プロジェクト期間を短縮するために労働力を増加させる，費用の増大が生じる，といった現象は捨象することとしている．

初期状態としては，地域の昼間人口は 300，各年度の予算の上限は 45 であるとした．

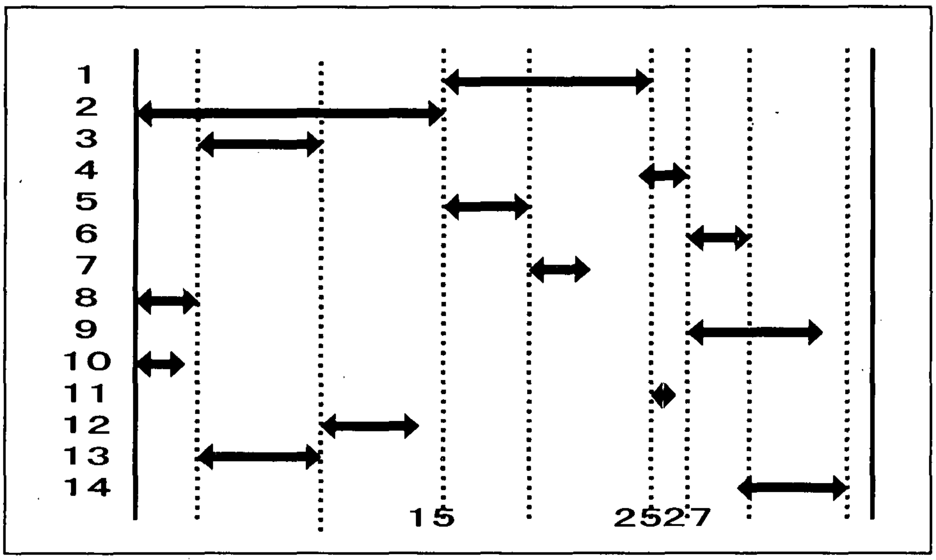
ここでは全てのプロジェクトが分割不可であり，かつ表－1に示された労働力制約がない場合（ケース1）の総費用最小化の最適解のスケジュールを図－2に示す．このとき，全てのプロジェクトが完了するのに 35 年要することがわかる．すなわち，各年度ごとの予算制約がない場合を PERT/ TIME 方式で解を得ると 27 年になり，それと比べて8年長くプロジェクト期間が必要であることがわかる．全体の費用は 919.32 となり，費用のピークは2年目と 20 年目になることがわかる（図－3参照）．

また，表－1に示すような労働力の供給に関する資源制約条件が加わった場合（ケース2）を想定する．制約としては，各労働力は昼間人口の 10%を上限として供給されるという制約を設けることとする．新たな資源制約条件が加わっても，全く同様に解くことができる．このとき，最適なスケジュールは図－4のようになり，予算執行状況，および労働力投下状況は図－5，図－6のようになる．

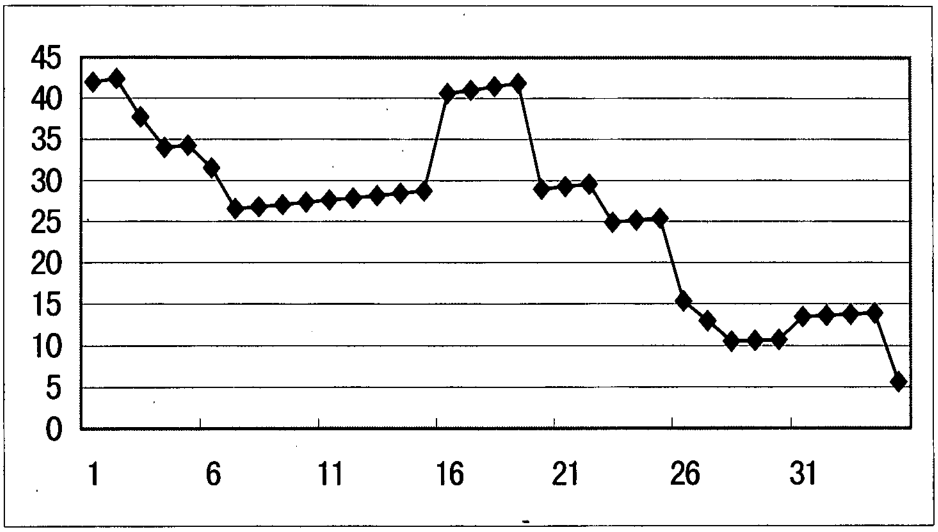
ケース2の場合，トータルのプロジェクト期間に変化はなく，35 年目に終了することがわかる．一方，プロジェクトのスケジュールはケース1と異なり，同時に実施できるプロジェクトの数は最大でも3であるように変化した．ここで，プロジェクト 12 とプロジェクト 13 については，いずれの順序が先行しても全く同値である．ゆえにこのケースの場合は最適解が2種類存在することになる．

また，全プロジェクト費用は 921.69 に増加する結果となった．

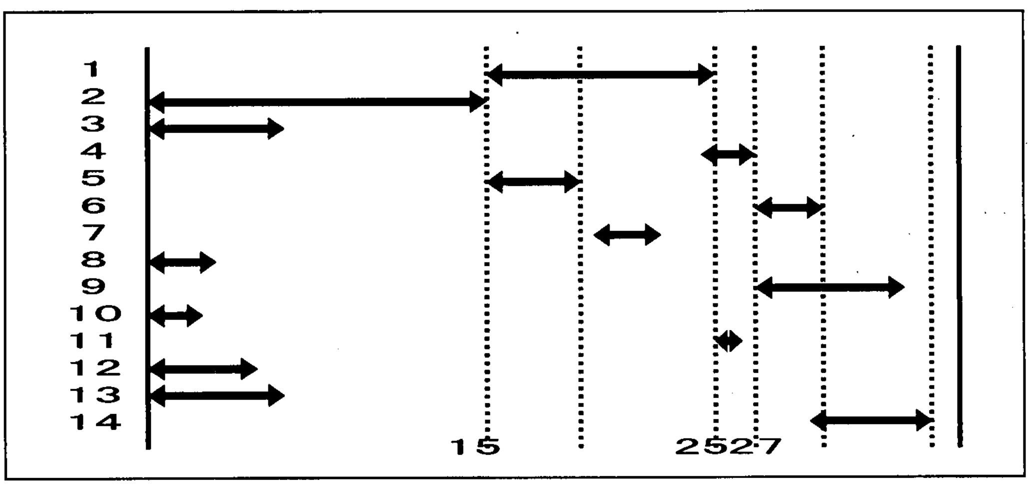
以上のように，本研究で提示した解法を適用することにより，複数の非線形制約条件を有するネットワーク型資源配分問題の最適解を求めることが可能であることを示すことができた．



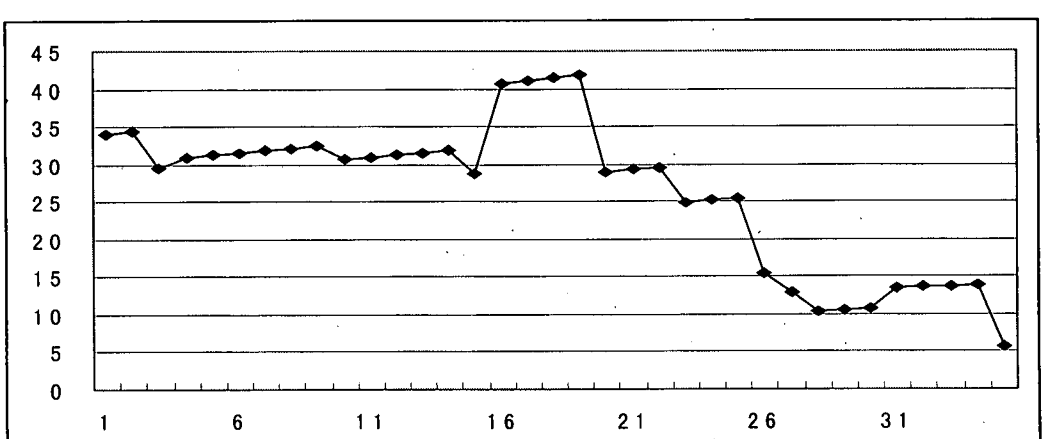
図－2 最適スケジュール（ケース1）



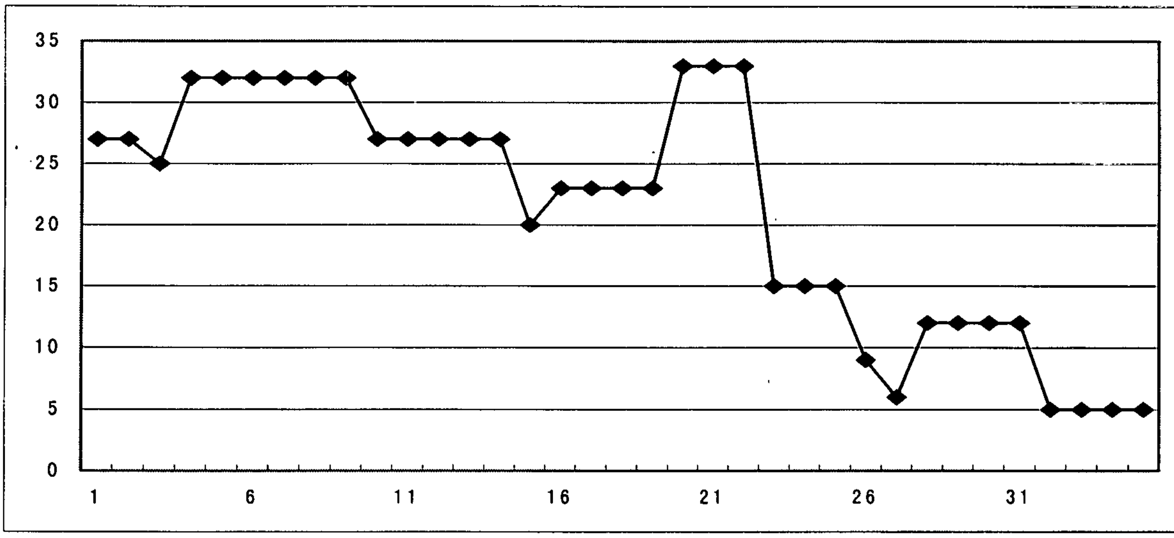
図－3 費用の推移(ケース1)



図－4 最適スケジュール(ケース2)



図－5 費用の推移(ケース2)



図－6　投下労働力の推移(ケース2)

6.　結論

本研究では，非線形の資源制約条件を含むプロジェクト・ネットワークの最適化について，ネットワーク型資源配分手法の応用を提案し，具体的な計算アルゴリズムの提示を行い，その検証を例題の計算を用いて行った．その結果，本研究で提示した解法アルゴリズムが非線形を含む資源制約を持つプロジェクト・ネットワークの最適化問題を解くに際して有効であることがわかった．

本研究で示した手法は，プロジェクトの数が大量になった場合でも，そのプロジェクト間の前後関係が確定できる場合，すなわちプロジェクト間の順序関係を固定的に与えることができる場合は適用可能である．

本研究における例題計算では，各プロジェクトの実施が分割不可の場合に限定して行った．しかし，本論では具体的には触れなかったが，プロジェクトが個々に分割して実行可能である場合も全く同様に取り扱うことが可能である．

今後，本研究で提示した解法の発展する方向としては，現在固定化されている費用の関数化と，それによる期間短縮による影響の把握が考えられる．

しかし，本研究で取り扱っている問題では，「各プロジェクトの実施規模が時間に関わらず一定である」，「予算制約が常に一定である」，「費用が一定である」といった強い仮定がいくつか存在する．今後は，本研究に含まれる強い仮定の緩和に関する検討を行っていく必要がある．

【謝辞】

本研究を行うに当たり，解法アルゴリズムの開発に当たっては，立命館大学大学院　滑川　達　氏の協力を得ました．ここに改めて感謝の意を表します．

【参考文献】

1)春名攻・滑川達:ネットワーク工程表の構造特性分析と最適工程計画モデル構築に関する理論研究,建設マネジメント研究論文集,Vol.14, pp.99-pp.112,1996.
2)今野浩・鈴木久敏:整数計画法と組み合わせ最適化,日科技連.
3)関根智明:PERT・CPM, 日科技連.
4)春名攻・滑川達ほか:グラフ理論を利用したPERT/MANPOWER 手法の最適解法に関する開発研究,土木学会関西支部年次学術講演会概要集,IV-8-1-IV-8-2,1997.
5)V.フバータル:線形計画法(下),啓学出版,1986.