

I-9 複合材料の微視的な力学特性評価への均質化逆解析の適用
 Evaluation of the Micro-mechanical Behavior of Composite Materials
 Using an Inverse Homogenization Analysis

呉旭, 市川康明
 Xu WU, Yasuaki ICHIKAWA

[抄録] 本論文では、構造物の境界値問題のマクロ的な観測量（たとえば、変位）から、複合材料のミクロ的な（たとえば、混合相あるいは界面）構成材料の力学特性を同定する一手法を提案する。逆解析のアルゴリズムとしては、拡張カルマンフィルターを用いた、カルマンフィルターの感度行列を中心差分法で求め、そこに均質化法の有限要素法を適用した。また、ユニットセルの変位特性関数の周期性境界条件をペナルティ法で取り込んだ。多相線形弾性複合材料を対象にして、模擬観測データを用いてユニットセル内部の材料の弾性係数とポアソン比を同時に同定する逆解析を行い、広範囲の初期値に対しても良い同定結果を得られた。

[Abstract] This paper deals with the identification of micro-mechanical behavior of composite materials with arbitrary given periodic microstructure. The procedure is based upon an inverse homogenization approach, which uses a homogenization theory for calculating the effective constitutive parameters of composite materials and introduces Kalman filtering to formulate the algorithm of parameter identification analysis. In order to illustrate the performance of the proposed procedure, an example for identifying the unknown Young's modulus and Poisson's ratio of a multiphase linear elastic composite material is presented. The results show that the identification processes have a good convergence even for a wide range of the initial conditions. Only the two-dimensional case is considered in this paper, but formulation and numerical procedures can easily be extended to the three-dimensional case.

[キーワード] 複合材料；微視的な力学特性；均質化法；拡張カルマンフィルター；逆解析

[Keywords] Composite Materials; Micro-mechanical Behavior; Homogenization Theory; Extended Kalman Filtering; Inverse Analysis.

土木・建築分野において各種の複合材料が広く使われている。周期的な内部構造を有する複合材料に対して、その微視的な幾何学特性および各相の力学特性または界面特性が既知とする場合には、代表体積要素（ユニットセル）から複合材料の巨視的な力学特性を評価する方法が多数存在している^{[1][2]}。しかし、ユニットセルにおける各相の構成材料の力学特性がすべて分かっているとは限られない^[3]。また、複合材料が使用されている際に、その内部材料の力学特性が劣化していくことも考えられる。したがって、複合材料の微視的な力学特性をどのように評価するかは重要である。本論文では、構造物の境界値問題のマクロ的な観測量（たとえば、変位）から、複合材料のミクロ的な（たとえば、混合相あるいは界面）構成材料の力学特性を同定する一手法を提案する。多相複合材料の二次元線形弾性微小変形境界値問題を例にして、模擬観測データによる逆解析の数値シミュレーションを行い、提案手法の適用性を検討する。

2. 問題の定式化

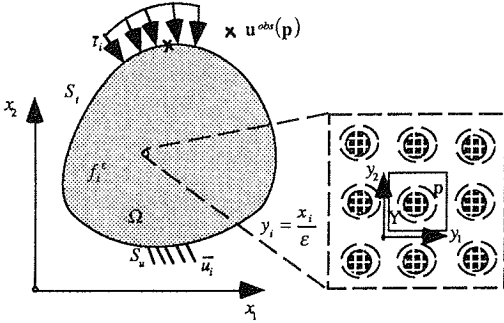


図-1 巨視構造物と微視ユニットセル

図-1に示すように、巨視的な座標系 $x_i (i=1,2)$ において構造物 Ω の線形弾性微小変形境界値問題を考える。体積力 f_i^e および荷重境界 S_i 上の外部作用力 \bar{f}_i が既知であり、変位境界 S_u 上の変位 \bar{u}_i も与えている。 Ω の構成材料としては、微視的な周期構造（ユニットセル Y ）を有する複合材料であると想定する。正な微小パラメータ ϵ を用いて、複合材料を拡大して見る。すなわち、 $y_i \equiv x_i / \epsilon$ で定義する微視的な座標系 $y_i (i=1,2)$ を導入し、ユニットセル Y を記述する。いま考えている問題は、ユニットセル Y の幾何学特性が既知であるが、 Y の中における一部の材料の力学特性（未知パラメータ p_m と定義する）は分からない。しかし、構造物 Ω の荷重境界 S_i においては、幾つか点（ \times ）での変位 u_i^{obs} が観測されている。以下では、変位 u_i^{obs} の観測情報から、どのようにして未知パラメータ p_m を求めるかについて、一つの逆解析手法を提案する。

2.1 観測変位 u_i^{obs} と未知力学パラメータ p_m の関係：

$u_i^{obs}(p_m)$ - 均質化法の適用

構造物 Ω の観測変位 u_i^{obs} とユニットセル Y の未知パラメータ p_m との関係は、つぎの微小変形線形弾性問題の方程式で規定されている。

応力釣り合い式：

$$\sigma_{\bar{y},x(j)}^e + f_i^e = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

応力とひずみの関係式（構成式）：

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^e e_{x(kl)}(u_s^e) \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ひずみと変位の関係式：

$$e_{x(ij)}(u_s^e) = (u_{i,x(j)}^e + u_{j,x(i)}^e) / 2 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

境界条件：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^e n_j &= \bar{f}_i \quad \text{on } S_i \\ u_i^e &= \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \end{aligned} \quad (4 \text{ a,b})$$

ここに、上付き文字 ϵ を有する変数は、巨視座標 x_i および微視座標 y_i の両方の関数であることを表す。下付き文字、 $x(i)$ および $y(i)$ は、それぞれ巨視座標 x_i および微視座標 y_i に関する偏微分、つまり $\partial / \partial x_i$ および $\partial / \partial y_i$ を意味する。また、 $e_{x(ij)}(\#)$ は対称な微小ひずみ演算子であり、 $e_{x(ij)}(\#) \equiv (\#_{i,x(i)} + \#_{j,x(i)}) / 2$ と定義する。

弾性テンソル E_{ijkl}^e は、当然ながら p_m の関数であり、以下では $E_{ijkl}^e(p_m)$ と記する。 $E_{ijkl}^e(p_m)$ が対称正定値であれば、変位場 u_i^e は唯一な解となり、 $u_i^{obs}(p_m)$ も唯一に存在している。ただし、 Ω が非均質であるので、式 (1) ~ (4) に対して有限要素法を適用すると未知数が非常に多くなり、計算は困難となる。そこで、均質化理論を適用すれば元の非均質問題を等価な均質問題に変換し、変位場 u_i^e と応力場 σ_{ij}^e の漸近解が求められる。以下では、均質化理論の線形弾性問題への適用の概要を示す^{[4],[5],[9],[7]}。

変位場 u_i^e について、式 (5) のように微小パラメータ ϵ に関して漸近展開を行う。そして、ひずみ場 $e_{x(ij)}(u_s^e)$ が式 (6) のように計算される。ただし、ここでは微分則 $(\#^e)_{,x(i)} = (\#)_{,x(i)} + \epsilon^{-1}(\#)_{,y(i)}$ を用いた。

$$u_i^e = u_i^0 + \epsilon u_i^1 + \epsilon^2 u_i^2 + \dots \quad (5)$$

$$\begin{aligned} e_{x(ij)}(u_s^e) &= \epsilon^{-1} e_{y(ij)}(u_s^0) + e_{x(ij)}(u_s^0) + e_{y(ij)}(u_s^1) \\ &\quad + \epsilon (e_{x(ij)}(u_s^1) + e_{y(ij)}(u_s^2)) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

また、応力場 σ_{ij}^e の漸近展開は式 (7) で与える。

$$\sigma_{ij}^e = \epsilon^{-1} \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 + \epsilon \sigma_{ij}^2 + \dots \quad (7)$$

ここに、 u_i^r 、 $\sigma_{ij}^r (r=0,1,2,\dots)$ はすべて Y -periodic 関数である。

式 (6) と式 (7) を式 (2) に代入し、 ϵ の同次べきの係数がゼロであるという条件より、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= E_{ijkl}^e(p_m) e_{y(kl)}(u_s^0), \\ \sigma_{ij}^1 &= E_{ijkl}^e(p_m) (e_{x(kl)}(u_s^0) + e_{y(kl)}(u_s^1)), \\ \sigma_{ij}^2 &= E_{ijkl}^e(p_m) (e_{x(kl)}(u_s^1) + e_{y(kl)}(u_s^2)) \end{aligned} \quad (8 \text{ a,b,c})$$

が得られる。同様に、応力釣合方程式 (1) に応力場の漸近展開式 (7) を代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,y(j)}^0 &= 0, \\ \sigma_{ij,x(j)}^0 + \sigma_{ij,y(j)}^1 &= 0, \\ \sigma_{ij,x(j)}^1 + \sigma_{ij,y(j)}^2 + f_i^e &= 0 \end{aligned} \quad (9 \text{ a,b,c})$$

が得られる。

そこで、式 (8a) と (9a) より、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 &= 0, \\ u_i^0 &= u_i^0(x_k) \end{aligned} \quad (10 \text{ a,b})$$

という結果が導かれた。

u_i^0 は巨視変数 x_i だけの関数であり微視変数 y_i とは関係なく、ユニットセルにおいて定数である。つまり、 u_i^0 は変位場 u_i^e の平均挙動を表し、ひとつのパラメータとみなせる。したがって、 u_i^0 を用いて u_i^1 をつぎのように正規化することができる。

$$u_i^1 = -\chi_i^{(kl)} e_{x(kl)}(u_s^0) + \varphi_i(x_k) \quad (11)$$

ここに、 $\chi_i^{(kl)}$ は Y-periodic 関数であり、ユニットセルの変位特性関数と呼ばれる。また、 $\varphi_i(x_k)$ は x_k の任意な関数である。

微視的な応力のつり合い条件式 (9b) に、式 (8b) と式 (11) を代入することによって変位特性関数 $\chi_i^{(kl)}$ の支配微分方程式がつぎのように得られる。

$$\left(E_{ijpq}^e(p_m) e_{y(pq)}(\chi_s^{(kl)}) \right)_{,y(j)} = \left(E_{ijkl}^e(p_m) \right)_{,y(j)} \quad (12)$$

Gauss の発散定理および Y-periodic 関数の性質を利用して、式 (12) の弱形式はつぎのように導かれる。ただし、 v_i は微視座標 y_i に関して 1 階微分可能な Y-periodic 関数 (ユニットセルにおける仮想変位に相当するもの) である。

$$\int_Y E_{ijpq}^e(p_m) \chi_{p,y(q)}^{(kl)} v_{i,y(j)} dY = \int_Y E_{ijkl}^e(p_m) v_{i,y(j)} dY \quad (13)$$

そして、ユニットセルの周期境界条件のもとで、有限要素法を式 (13) に適用すれば、 $\chi_i^{(kl)}$ の数値解が求められる。明らかに $\chi_i^{(kl)}$ が p_m の関数である。また、変位特性関数 $\chi_i^{(kl)}$ の物理的な意味としては、一定のひずみ (巨視的なひずみ) $e_{x(kl)}(u_s^0)$ をユニットセルに与える際に、ユニットセルの内部に材料が非均質であるため、そこで巨視な平均変位 u_i^0 からどのぐらいの一階

のズレ変位 u_i^1 を生じているかを表している。

つぎに、式 (11) を式 (8b) に代入して

$$\sigma_{ij}^1 = \left(E_{ijkl}^e - E_{ijpq}^e \chi_{p,y(q)}^{(kl)} \right) e_{x(kl)}(u_s^0) \quad (14)$$

と書き換える。そして、式 (14) の両辺をユニットセルでの平均計算を行う。そうすると、巨視的な平均応力と平均ひずみとの関係を表わす材料の均質化した構成式がつぎのように導かれる。

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^1 \rangle &= \langle E_{ijkl}^e(p_m) - E_{ijpq}^e(p_m) \chi_{p,y(q)}^{(kl)} \rangle e_{x(kl)}(u_s^0) \\ &\equiv E_{ijkl}^H(p_m) e_{x(kl)}(u_s^0) \end{aligned} \quad (15)$$

$$E_{ijkl}^H(p_m) \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl}^e(p_m) - E_{ijpq}^e(p_m) \chi_{p,y(q)}^{(kl)} \right) dY \quad (16)$$

ここに、 $\langle \# \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y (\#) dY$ 、ユニットセルにおいての平均計算を表わす。|Y| はユニットセルの体積 (あるいは面積) である。 $E_{ijkl}^H(p_m)$ は均質化弾性テンソルであり、変位特性関数 $\chi_i^{(kl)}$ を通して p_m と非線形な関係で結んでいる。

また、式 (9c) についてもユニットセルにおいての平均計算を行い、

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle_{,x(j)} + \langle f_i^e \rangle = 0 \quad (17)$$

という均質化した応力つり合い微分方程式が導かれる。

以上の結果をまとめると、均質化法の適用により元の材料非均質の境界値問題 (式 (1) ~ 式 (4)) は、等価な材料均質の境界値問題 (式 (17)、式 (15)、式 (3)、式 (4a,b)) に変換され、つぎの均質化問題の弱形式を解くことに帰着する。ただし、 v_i^0 は変位境界 S_u においてゼロであり、 Ω において巨視座標 x_i に関して一階微分可能な関数である。

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(p_m) u_{k,x(l)}^0 v_{i,x(j)}^0 d\Omega = \int_{\Omega} f_i^H v_i^0 d\Omega + \int_{S_i} \bar{t}_i v_i^0 ds \quad (18)$$

明らかなように、観測変位 u_i^{obs} は構造物 Ω の離散点での平均変位場 u_i^0 そのものであり、式 (18) に対して有限要素法を適用すれば求められる。そして、 u_i^{obs} と p_m との関係 $u_i^{\text{obs}}(p_m)$ は、ユニットセルの変位特性関数 $\chi_i^{(kl)}$ および有限要素法を介して数値的に結ばれている。

2.2 u_i^{obs} から p_m を同定するアルゴリズムー拡張カルマンフィルターの適用

カルマンフィルター理論は、線形確率システムの状態推定のアルゴリズムとして開発されたものであり、未知パラメータを含んでいるシステムの推定や同定には多く用いられる。非線形なシステムまたは非確率のシステムに対しても、観測量と状態量との間に何らかの関係さえ分かれば、カルマンフィルター理論を拡張していわゆる拡張カルマンフィルターを用いて、多くの適用例が見られる。ここで、逆解析のアルゴリズムとしてその概要を示しておく^{[8][9]}。

いま、ユニットセル内の材料の未知パラメータ \mathbf{p} (以下ではベクトルやテンソルの記号を太字で記述する) が時間に依存しない未知状態ベクトルであると設定する。したがって、時間に伴い \mathbf{p} の変化式、すなわち状態方程式は式 (19) で示すように定常式となっている。

$$\mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} + \mathbf{w}_t \quad (19)$$

ただし、ここで未知状態ベクトル \mathbf{p} にシステム (ノイズ) 誤差 \mathbf{w} を与えている。また、 \mathbf{w} の平均値がゼロであり \mathbf{w} の共分散行列が \mathbf{Q} である。下付き文字 t および $t+1/t$ はそれぞれ時刻 t での値および時刻 t からつぎの時刻 $t+1$ での予測値を表わしている。

一方、未知状態ベクトルと観測量との間の関係式、すなわち観測方程式は形式的に式 (20) で与えている。また、 \mathbf{v} は観測誤差であり、その平均値がゼロで共分散行列が \mathbf{R} である。

$$u_i^{\text{obs}} = u_i^0(\mathbf{p}) + v_i \quad (20)$$

前節で示したように、 $u_i^0(\mathbf{p})$ は構造物 Ω での観測点の変位であり、未知パラメータ \mathbf{p} との間には、ユニットセルの変位特性関数 $\chi^{(kl)}$ を介して数値的な関係で結ばれている。 $\chi^{(kl)}$ が求められれば、均質化弾性係数 $E_{ijkl}^H(p_m)$ を式 (16) より簡単に計算することができる。そして、有限要素法を式 (18) に適用することによって $u_i^0(\mathbf{p})$ が求められる。

$\chi^{(kl)}$ を求めるために、式 (13) に有限要素法を適用すればよい。ユニットセル Y において、 $\chi^{(kl)} = \mathbf{N}\mathbf{U}^{(kl)}$ のように $\chi^{(kl)}$ の離散化を行い、全体の離散化線形代数方程式がつぎのように纏められる。

$$(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{C})\mathbf{U}^{(kl)} = \mathbf{F}^{(kl)} \quad (21)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{Y_i} \int_{Y_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\mathbf{p}) \mathbf{B} dY_i$$

$$\mathbf{F}^{(kl)} = \sum_{Y_i} \int_{Y_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(\mathbf{p}) dY_i$$

ここでは、 \mathbf{N} が変位形状関数マトリックスであり、 \mathbf{B} が変位ひずみマトリックスである。 \mathbf{C} が周期境界条件マトリックスであり、 α がペナルティ数である。

$\mathbf{D}(\mathbf{p})$ が弾性マトリックスであり、ユニットセル内の材料の未知パラメータ \mathbf{p} の関数である。

カルマンフィルター理論によると、未知状態ベクトル \mathbf{p} の初期値 $\hat{\mathbf{p}}_{0/0}$ および推定誤差共分散の初期値 $\mathbf{P}_{0/0}$ を設定すれば、(模擬) 観測データ u_i^{obs} をつぎの逐次計算に取り入れることにつれ、未知状態ベクトル \mathbf{p} の最適推定値 $\hat{\mathbf{p}}$ を同定することができる。拡張カルマンフィルターによる同定解析のプロセスは以下のように要約しておく。

まず、状態方程式 (19) によりつぎの更新計算を行う。

$$\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t} = \hat{\mathbf{p}}_{t/t} \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_{t+1/t} = \mathbf{P}_{t/t} + \mathbf{Q}_{t+1} \quad (23)$$

そして、式 (23) によりカルマンゲイン $\mathbf{G}_{t+1/t}$ を計算する。

$$\mathbf{G}_{t+1/t} = \mathbf{P}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}^T (\mathbf{H}_{t+1/t} \mathbf{P}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}^T + \mathbf{R}_{t+1})^{-1} \quad (24)$$

ただし、 $\mathbf{H}_{t+1/t} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}^0(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t}}$ は感度行列であり、

未知パラメータに対して観測量の変化率を表わしている。ここでは、影響係数法 (中心差分法) を用いて感度行列 $\mathbf{H}_{t+1/t}$ の第 i 列 $\mathbf{H}_{t+1/t}^{(i)}$ を式 (25) のように求めている。

$$\mathbf{H}_{t+1/t}^{(i)} \approx \frac{\mathbf{u}^0(\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t} + \Delta \mathbf{p}_i) - \mathbf{u}^0(\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t} - \Delta \mathbf{p}_i)}{2\Delta p_i} \quad (25)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{p}_i \equiv \{0, 0, \dots, \Delta p_i, \dots\}^T$ と定義する。 Δp_i が第 i 番目の未知パラメータ p_i の増分である。

つぎに、カルマンゲイン $\mathbf{G}_{t+1/t}$ を用いて $t+1$ 時刻の観測情報による新しい更新計算を行い、 $t+1$ 時刻の未知パラメータの最適推定値 $\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t+1}$ および最適推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}_{t+1/t+1}$ がそれぞれ式 (26) および式 (27) で計算される。

$$\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t+1} = \hat{\mathbf{p}}_{t+1/t} + \mathbf{G}_{t+1/t} (\mathbf{u}_{t+1}^{\text{obs}} - \mathbf{u}_{t+1}^0(\hat{\mathbf{p}}_{t+1/t}))$$

(26)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{t+1/t+1} = & (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}) \mathbf{P}_{t+1/t} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t})^T \\
 & + \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{R}_{t+1} \mathbf{G}_{t+1/t}^T
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

このように、時間軸を追って新しい観測情報が得られた場合に再び更新計算を行い、未知パラメータの最適推定値を求められる。ただし、定常パラメータの同定解析を遂行する場合には、時間軸が繰り返し計算の意味を表わしている。

3. 数値シミュレーション

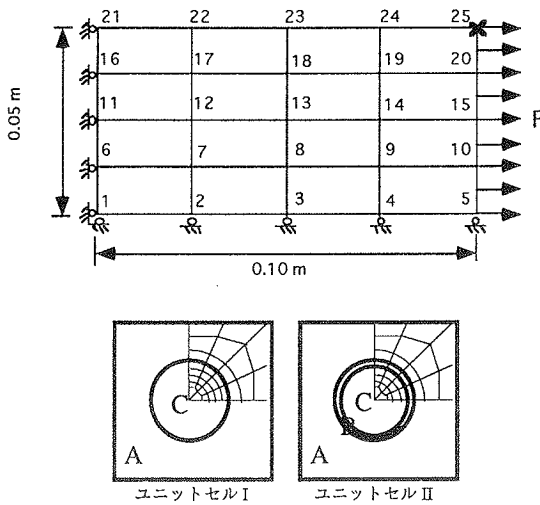
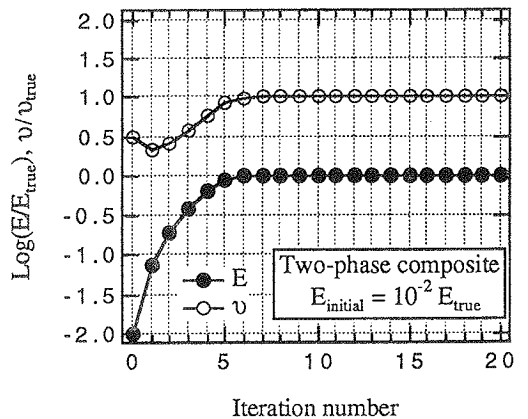
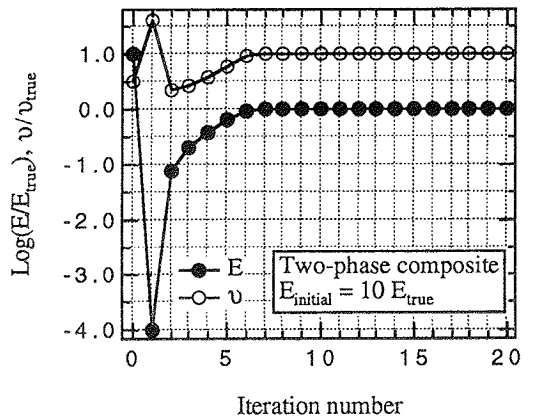
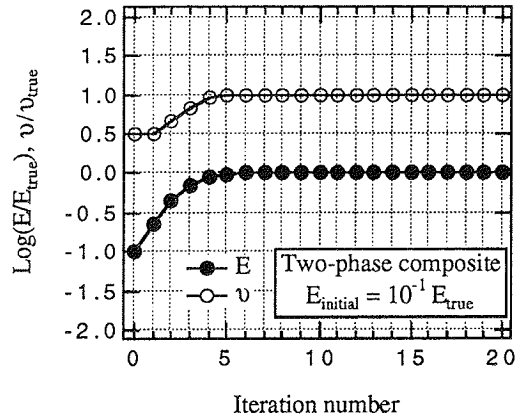


図-2 逆解析の例

図-2に示すように、一軸引っぱり試験片（四分の一）の一点（節点25）での観測変位から、試験片材料の微視構造（ユニットセル）内の材料の未知弾性係数 E とポアソン比 ν を同時に同定する数値シミュレーションを行う。まず、同定しようとする弾性係数 E とポアソン比 ν を真値に設定し、均質化法の有限要素解析を行い、観測点（節点25）の変位を出力する。それに一定の観測誤差を加えて、模擬観測データとしてあとの逆解析に提供する。二種類のユニットセルについての同定結果をまとめて以下に示す。



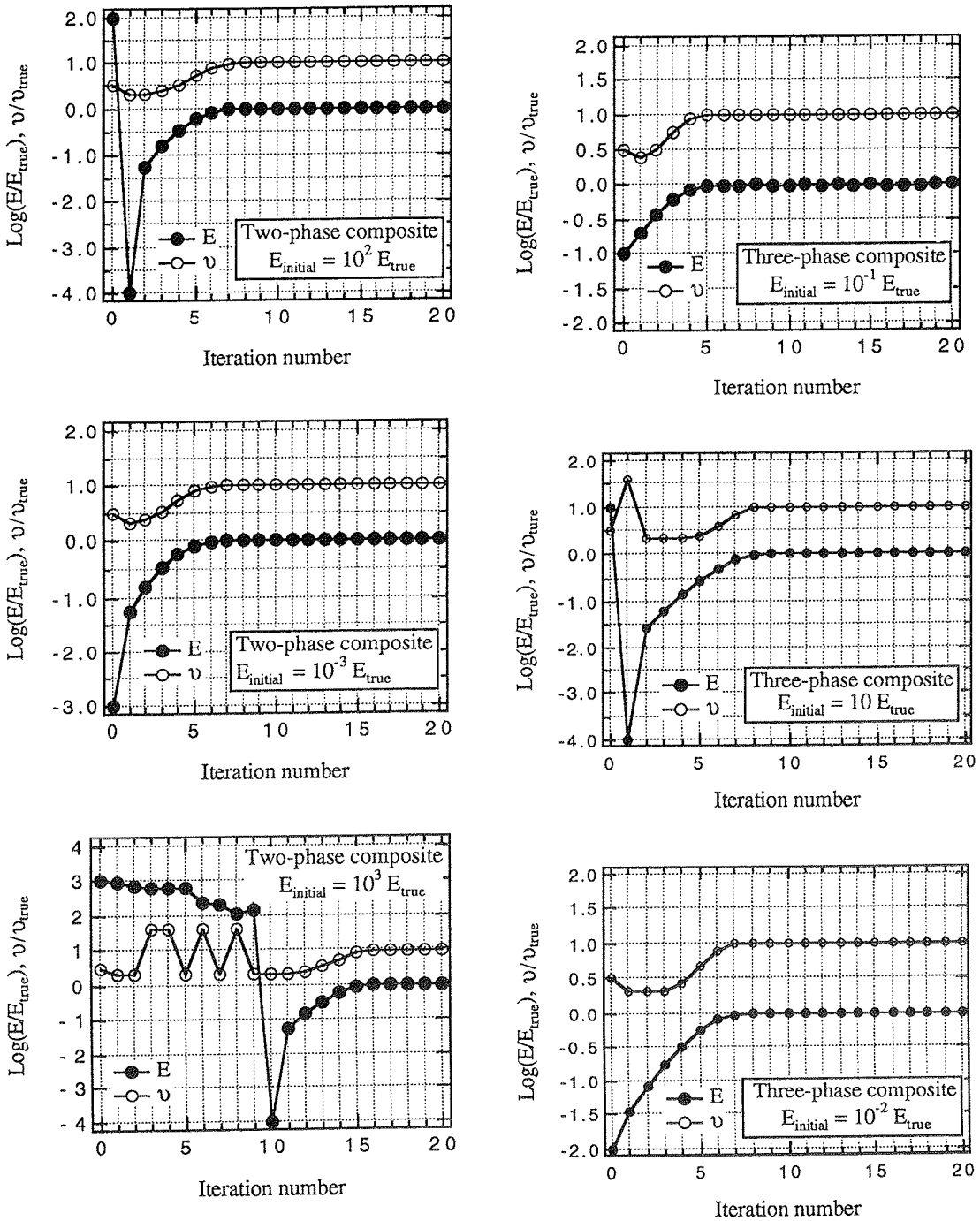


図-3 二相複合材料の同定解析 (ユニットセルI)

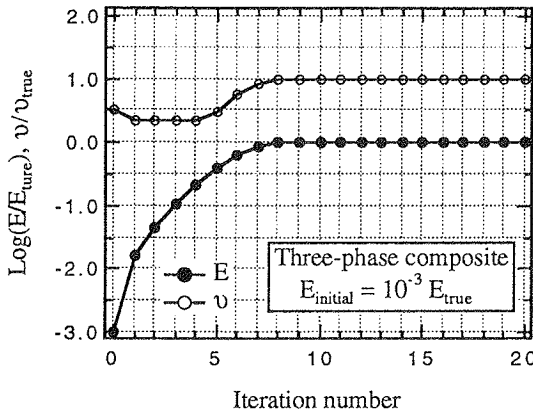


図-4 三相複合材料の同定解析 (ユニットセルII)

3.1 二相複合材料 (ユニットセルI)

ユニットセルIが2種類の線弾性材料(A,C)で構成され、材料Aの弾性係数 E_A とポアソン比 ν_A が既知であることを仮定する。材料Cの弾性係数 E_C とポアソン比 ν_C を節点25での観測変位から同定する。ポアソン比 ν_C の初期値はその真値の半分(0.15)に設定し、弾性係数 E_C の初期値をいろいろ変化する。また、観測データを有効に利用し同定解析の収束性を高めるために、このような定常パラメータ同定解析においてもシステムノイズ w_i を非零とし、その共分散行列 Q_i を未知パラメータの推定誤差共分散行列 $P_{i,i}$ と同値している。図-3に示すように、 E_C の初期値が真値から ± 3 桁離れている各種の同定解析例では、弾性係数 E_C とポアソン比 ν_C を同時に同定することができ、安定な収束過程を示した。

3.2 三相複合材料 (ユニットセルII)

ユニットセルIIが3種類の線弾性材料(A,B,C)で構成し、材料A,Cの弾性係数 E_A, E_C およびポアソン比 ν_A, ν_C が既知であることを仮定する。材料Bは未知な薄い混合層として考えられる。その弾性係数 E_B とポアソン比 ν_B を求めるために、試験片の一点(節点25)での観測変位を利用して逆解析を行う。観測データを有効に利用し同定解析の収束性を高めるために、ユニットセルIと同様にここでもシステムノイズ w_i を非零とし、その共分散行列 Q_i を未知パラメータの推定誤

差共分散行列 $P_{i,i}$ と同値している。ポアソン比 ν_C の初期値もその真値の半分(0.15)に設定している。 E_B の各種な初期値に対する逆解析の結果を図-4に示す。ユニットセルIとよく似た同定収束過程が見られ、弾性係数 E_B とポアソン比 ν_B を同時に同定することができた。

4. おわり

均質化法を取り込んだ逆解析による複合材料の微視的な力学特性を評価する手法を提案した。逆解析のアルゴリズムとしては、拡張カルマンフィルターを用いた。カルマンフィルターの感度行列を中心差分法で求め、そこに均質化法の有限要素法を適用した。また、ユニットセルの変位特性関数の周期性境界条件をペナルティ法で取り込んだ。多相線形弾性複合材料を対象にして、模擬観測データを用いてユニットセル内部の材料の弾性係数とポアソン比を同時に同定する逆解析を行い、広範囲の初期値に対しても良い同定結果を得られた。提案手法の実問題への適用性の検討が必要であり、今後の課題とする。

参考文献

- [1] Hashin, Z. (1983): Analysis of Composite Materials: A Survey. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp.481-505.
- [2] Aboudi, J. (1991): *Mechanics of Composite Materials*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.
- [3] Jansson, S. (1992): Homogenized Nonlinear Constitutive Properties and Local Stress Concentrations for Composites with Periodic Internal Structure. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 29, No. 17, pp. 2181-2200.
- [4] Sanchez-Palencia, E. (1980): Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 127. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Devries, F., Dumontet, H., Duvaut, G., and Lene, F. (1989): Homogenization and Damage for Composite Structures., *Int. j. numer. methods. eng.*, Vol. 27, pp.285-298.
- [6] Guedes, J. M. and Kikuchi, N. (1990): Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 83, pp.143-198.
- [7] Sigmund, O. (1994): Materials with prescribed

constitutive parameters: An inverse homogenization problem. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 31, No. 17, pp. 2313-2329.

[8] Jazwinski, A. H. (1970): *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press.

[9] Bui, H. D. (1994): *Inverse Problems in the Mechanics of Materials: An Introduction*. CRC Press.