

1. はじめに

水面波動解析において、高精度の計算結果を得るためには、波長の変化に応じた適切な格子や要素分割データを作成し、用いることが要求される。これまで、格子あるいは要素分割の妥当性を表す指標としては、1波長を何分割するかという波長要素幅比が用いられており、その値が全領域において10以上が望ましいとされている^[1]。しかし、複雑な境界形状を有する解析領域内に対して、この要求を満たす分割を行うことは容易ではない。また、一般に数値解析は各種海岸・海洋構造物の計画および設計段階において用いられるため、解析形状の異なる様々なケースに対して迅速に計算結果を得ることが望まれる。したがって、水面波動解析を高精度にかつ迅速に行うために、波長の変化に応じた要素分割を自動的に作成する方法を構築することは、海岸・海洋構造物の計画及び設計上重要であると考えられる。

現在までに、構造解析の分野を中心に、多くの自動要素分割法が提案されている^[2-8]。これらの方法を大別すると、次の三つの方法に分類できる；①写像関数を用いる方法^[2]、②微分方程式を解く方法^[3, 4]、③写像概念に基づかない方法（ネット法、節点分布法など）^[5-7]。これらの方法の中で、①と②の方法は解析領域の幾何学的形状が比較的簡単な場合に有効な方法である。これに対して、解析領域の幾何学的形状が複雑な場合には、③の方法が有効であるといえる。しかし、これらの方法の多くは構造解析を目的としているため、これらの方法を水面波動問題に適用する場合には、以下の問題点が指摘されている。第一に、要素分割を行った後に水深データを別途入力するために、データ作成に多大の労力と時間を要する。第二に、波長の変化に応じた適切な要素分割を行うことが難しい。近年、水面波動解析のための自動要素分割法も提案されているが^[4, 5, 7]、それらは上記の第一の点は解決しているものの第二の点については十分な検討がなされていない。

著者らはこれまで、水面波動解析のための自動要素分割法に関する研究を行ってきた^[8]。その方法の特徴は、解析領域全体をクーラン数がほぼ一定となるように三角形要素により分割を行うものであり、これにより波長の変化に適応した分割を行うことが可能となり、計算の安定性および精度の向上が図れることが確認された。しかし、要素分割数の程度を左右するパラメータとして、波動現象とは独立した量である微小時間増分量を用いていたため、たとえば波長要素幅比を10以上にするような適切な入力値を事前に決定することは困難であり経験を必要とした。そこで、本論文では、要素分割のパラメータとして波の周期を用い、その値と実現したい波長要素幅比を直接入力することにより、自動的に任意地点において波長要素幅比が一定になるように要素分割を行う方法を提案する。これにより、高精度な計算結果が保証されることになる。また、従来の著者らの方法では節点総数が多い場合、計算時間が多大になるという問題点が指摘されていた。本論文では、この問題点を解決するために、要素分割の方法としてデラウニー法^[9]を用いることの検討を行っている。

2. 最適自動要素分割法

2.1 概要

本手法は、解析領域全体で波長要素幅比がほぼ一定となるように要素分割を行う。すなわち、

$$n = L / \Delta x = \text{constant} \quad (1)$$

ここに、 n は波長要素幅比、 L は波長、 Δx は代表的要素サイズである。任意地点における波長 L は、水深と入射波の周期を用いて、つぎの分散関係式から決定される。

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (2)$$

ここに、 σ は波の周波数、 g は重力加速度、 k は波数、 h は水深である。

本手法は、写像概念に基づかない節点分布法⁽⁶⁾の一種と定義することができる。すなわち、解析領域の境界を定義した後、解析領域内に節点を発生させて要素分割を行う方法である。図-1に、本手法のフローチャートを示す。本手法では、仮要素と本要素の二つの要素分割を導入する。仮要素分割とは、事前にデータとして与えた節点群から構成させる要素分割であり、新たに節点を発生させる際の要素サイズ関数値(後述)と水深値の補間に用いる。本要素分割は、実際に計算に用いる要素分割である。また、本手法のアルゴリズムを示すと、次のようになる。

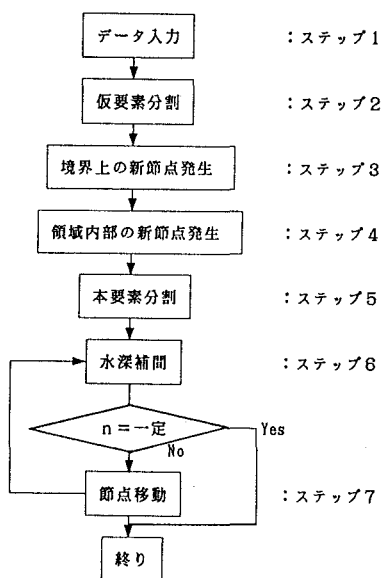


図-1 フローチャート

ステップ1: 解析領域の境界上および水深が既知な場所に節点を設定(座標位置、水深)する。その他の入力データは、波長要素幅比 n と波長の計算に必要な波の周期 T 、および節点の発生間隔である。

ステップ2: ステップ1で設定した節点を用いて、解析領域全体を三角形要素で分割する。この要素を仮要素と定義する。要素分割の方法として、デラウニー法を用いる。

ステップ3: 要素サイズ関数を定義し波長要素幅比が一定になるように、解析領域の境界上に新節点を発生させる。

ステップ4: ステップ3と同様に、波長要素幅比が一定となるように、解析領域の内部に新節点を発生させる。

ステップ5: ステップ1で設定した節点とステップ3、4で発生した節点を用いて、解析領域全体をデラウニー法により三角形要素に分割する。この要素を本要素と定義する。

ステップ6: ステップ3、4で発生した新節点の水深を求める。これは、新節点が仮要素のどの要素内に含まれるかを判定した後、仮要素の節点の水深値を用いて線形補間により求める。

ステップ7: 各要素の波長要素幅比を計算し、その値がほぼ解析領域全体で一定になるまで節点の移動を行う。節点の移動後は、再びステップ6に戻り水深値を求める。

2.2 入力データ(ステップ1)

本手法に必要な入力データは以下の6種類である。

- 1) 解析領域の形状を表現する境界上の点(平面座標、水深)
- 2) 水深が既知の点(平面座標、水深)
- 3) 波の周期 T
- 4) 波長要素幅比 n
- 5) 曲線境界の指定
- 6) 節点発生を検討間隔 δ

である。このとき解析領域を示す外部境界は反時計回りに、島や構造物等の内部境界は時計回りに節点番号

が連続になるように設定する。平面座標はデジタイザにより、水深はキーボードより入力する。

2.3 三角形要素の生成法（ステップ2、5）

三角形要素の生成は、デラウニー法を用いて行う。デラウニー法は、局所的な最小角最大原理に基づき、任意に設定された節点群を最も正三角形に近い形で分割する方法である。ただし、デラウニー法は、境界という概念がないため、対象領域が凸な場合には領域内を完全に三角形要素で分割することができるが、領域が凹な場合には凹部の内部にも要素分割を行ってしまう。したがって、デラウニー法を複雑な境界形状を有する場合の要素分割に適用する場合には、設定した境界形状を壊さないように、工夫する必要がある。本論文では、デラウニー法により要素分割を行った後、境界形状に適合するように要素分割の修正を行うことを考える。アルゴリズムは、以下に示すとおりである。

ステップ1：与えられた節点を用いて、デラウニー法^[9]により要素分割を行う。

ステップ2：各境界辺について横切る要素を抽出し、境界辺を忠実に再現するように関係する節点を用いて要素の再分割を行う（図-2参照）。この操作は以下の手順により行う。

①境界辺を横切る要素を抽出し（図-2(a)参照）、消去する。

②境界辺を横切る領域を、境界辺を境にして2つの小領域に分割する（図-2(b)参照）。

③各小領域においてデラウニー法を適用して、要素の再分割を行う（図-2(c)参照）。図より、境界に対して右側の小領域は凹部を有するため、凹部内にも要素分割を行ってしまう。

④ここで境界節点を持たない要素を抽出することにより、小領域の凹部内の要素を取り除くことができる（図-2(d)参照）。

ステップ3：全体領域に対して、分割された要素が領域の内部にあるか外部にあるかの判定を行い、外部にある要素を取り除く。これには、谷口、太田^[10]の方法を用いる。すなわち、境界辺をもつ要素の節点番号を小さい順に読むと、要素が外部領域にある場合には節点の並び順が時計回りになる（図-3参照）ことに着目する。この判定法により、小領域の外部にある要素を抽出でき取り除くことができる。

以上述べた方法により、凹な領域に対しても境界を忠実に再現し要素分割を行うことが可能となる。この方法は、仮要素と本要素の両方の作成に用いている。

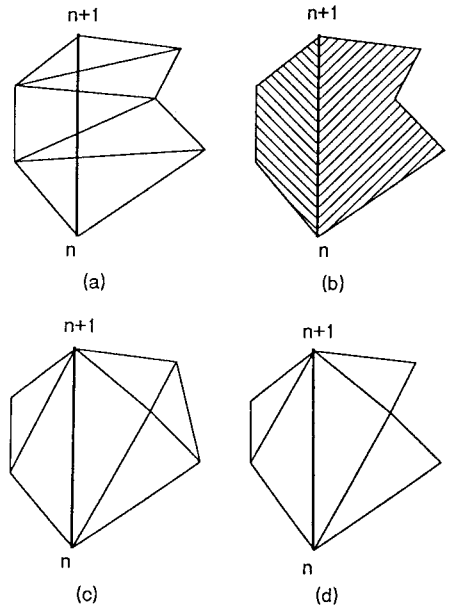


図-2 境界の表現法

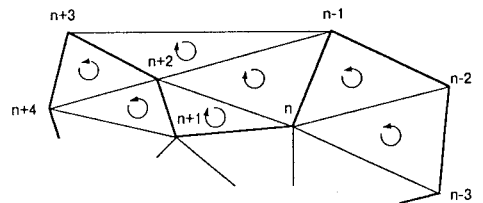


図-3 領域内・外要素の判定

2.4 境界上の新節点の発生（ステップ3）

新節点を発生させるために、入力した各節点において、以下に示す要素サイズ関数を定義する。

$$f_i = L_i / n \quad (3)$$

ここに、 f_j と L_j はそれぞれ節点における要素サイズ関数と波長であり、 n は波長要素幅比である。いま、図-4に示す境界辺を考え、新節点の発生を δ 間隔で検討する。そして、次式の関係が成立する場合に点Pを新節点とする。

$$f_p < l \quad (4)$$

ここに、 f_p は点Pの要素サイズ関数、 l は点Pから最も近い既存節点までの距離である。節点Pの要素サイズ関数値および水深値は、境界辺の両端の節点値を用いて線形補間により求める。なお、境界辺が曲線境界の場合には、図-5に示すように節点位置を曲線境界上に移動させる必要がある。節点の移動方法としては、ラグランジュ補間法を用いた。すなわち、節点Pを次式によって補間する。

$$P(s) = L_j(s) t_j \quad (j=1\sim 4) \quad (5)$$

ここに、 $L_j(s)$ はラグランジュの補間関数、 t_j は節点 $i-1$ から $i+2$ の $s-t$ 座標系における t 座標値である。

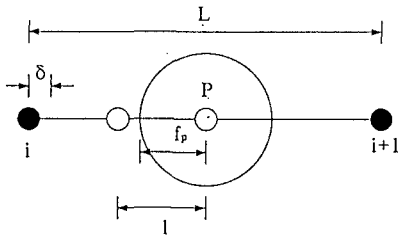


図-4 境界上の新節点の発生

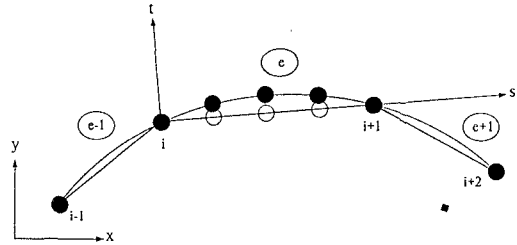


図-5 曲線境界

2.5 領域内の新節点の発生と水深補間 (ステップ4、6)

領域内の新節点の発生は、図-6に示すように下方から δ 間隔で検討する。まず、点Pが仮要素のどの要素内に含まれるかを調べる必要がある。この判定には、以下の方法を用いる^[11]。図-7において、点Pが三角形要素内に含まれる場合には、次式が成立する。

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0 \quad (6)$$

ここに、 A_1 は三角形P-2-3、 A_2 は三角形1-P-3、 A_3 は三角形1-2-Pの面積であり、次式により算定される。

$$A_1 = \{x_p(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_p) + x_3(y_p - y_2)\} / 2 \quad (7)$$

$$A_2 = \{x_1(y_p - y_3) + x_p(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_p)\} / 2 \quad (8)$$

$$A_3 = \{x_1(y_2 - y_p) + x_2(y_p - y_1) + x_p(y_1 - y_2)\} / 2 \quad (9)$$

点Pが着目する要素内に含まれない場合には、いずれかの面積が必ず負となる。

次に、点Pの要素サイズ関数は、点Pが含まれる仮

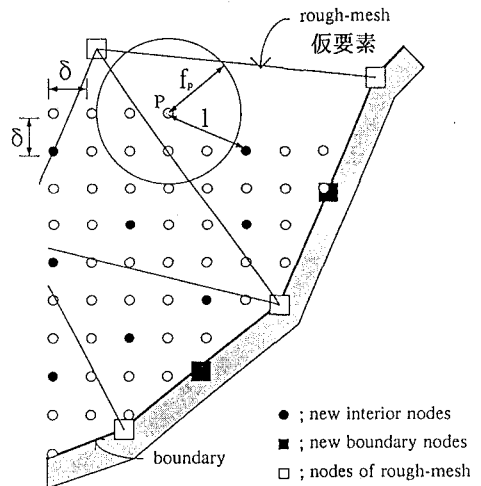


図-6 領域内の新節点の発生

要素の三節点の値を用いて、次式の線形補間式により求める。

$$f_p = \Phi_1 f_1 + \Phi_2 f_2 + \Phi_3 f_3 \quad (10)$$

ここに、 Φ_i は面積座標(補間関数)であり、次式で与えられる。

$$\Phi_i = A_i / A \quad (11)$$

ここに、 A は三角形A-B-Cの面積である。そして、(4)式が成立する場合に、点Pを新節点とする。図6において、●印は(4)式が成立した節点を、○印は(4)式が成立しなかった節点を表している。

また、新節点の水深も同様に線形補間により求める。

$$h_p = \Phi_1 h_1 + \Phi_2 h_2 + \Phi_3 h_3 \quad (12)$$

ここに、 $h_1 - h_3$ は三角形の節点における水深である。

2.6 節点移動(ステップ7)

本要素の波長要素幅比をより一定にすることと、歪みが大きい要素をより正三角形に近い形に修正するために、次式に従い節点の移動を行う(図-8参照)。^[12]

$$x_p = \sum (n_e \cdot A_e \cdot x_e) / \sum (n_e \cdot A_e) \quad (e=1 \sim m) \quad (13)$$

ここに、 x_p は節点Pの新たな座標、 m は節点Pを共有する要素総数である。また、 n_e 、 A_e および x_e は、それぞれ各要素における波長要素幅比、面積、重心位置である。

3. 要素分割例

要素分割例として、本手法を境界形状及び水深形状が複雑な伊勢湾・三河湾の要素分割に適用した例を示す。本例で用いた入力データは、以下のとおりである。

- 入力された節点総数：507
- 波の周期T：30分(高潮解析を想定)
- 波長要素幅比n：20
- 曲線境界：なし
- 節点の発生間隔 δ ：250m

図-9にデータとして入力した節点図を示す。そして、図-10に本手法により最終的に得られた要素分割図を示す。節点総数は3199、要素総数は5672である。また、図-11に水深図を示す。図より、水深変化に適応した要素分割が実現されていることが分る。図-12に、波長要素幅比nの分布図を示す。図中、横軸は波長要素幅比、縦軸は要素数を示している。図より、nが20付近を中心に分布しており、ほとんど全ての要素がn=10~30の範囲にあることがわかる。このことにより、高精度な計算結果が得られることが期待される。

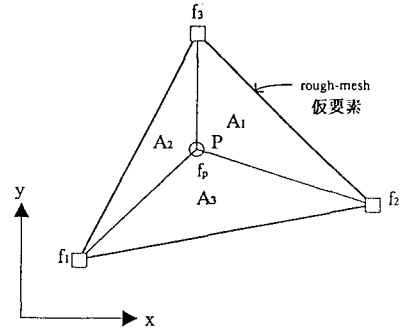


図-7 要素サイズ関数の補間

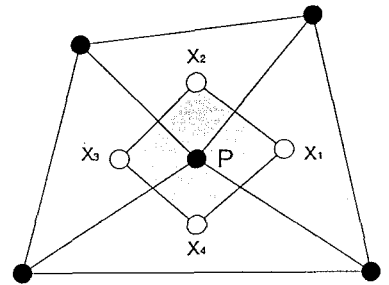


図-8 節点の移動

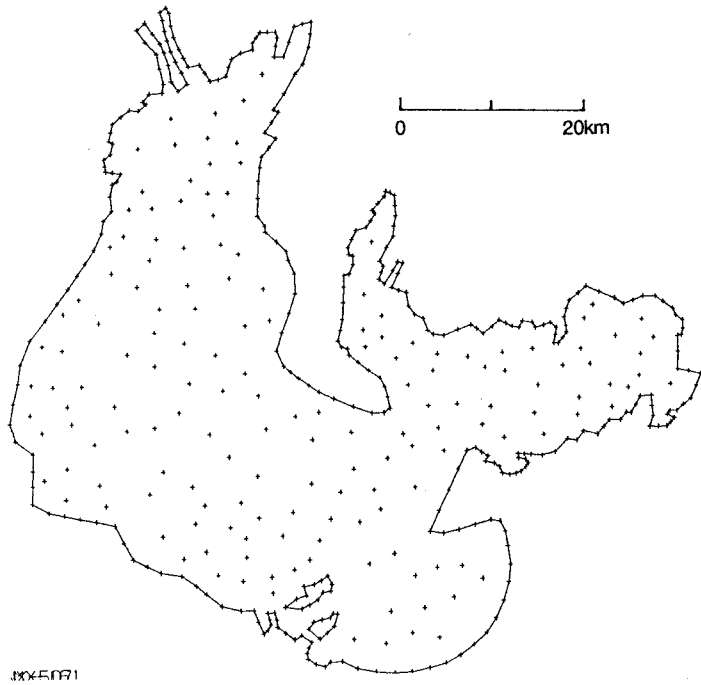


図-9 入力節点データ

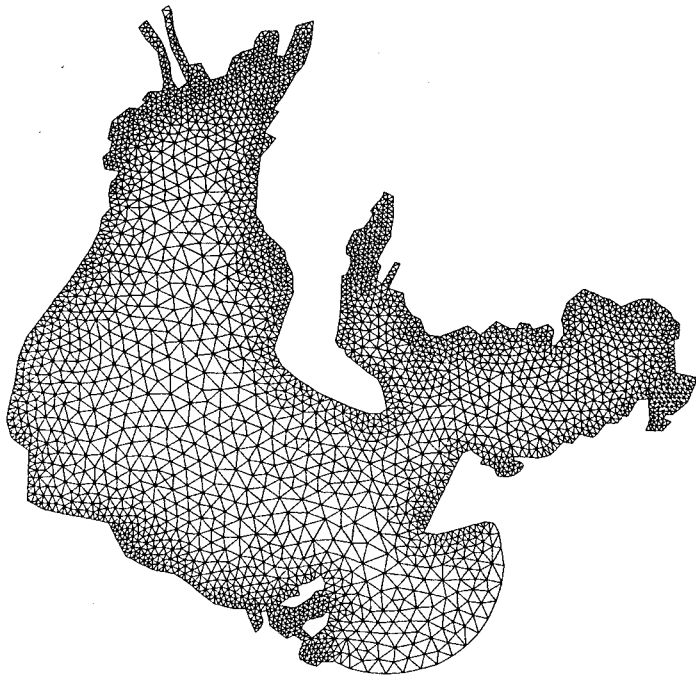


図-10 伊勢湾・三河湾の要素分割図



図-11 伊勢湾・三河湾の水深図

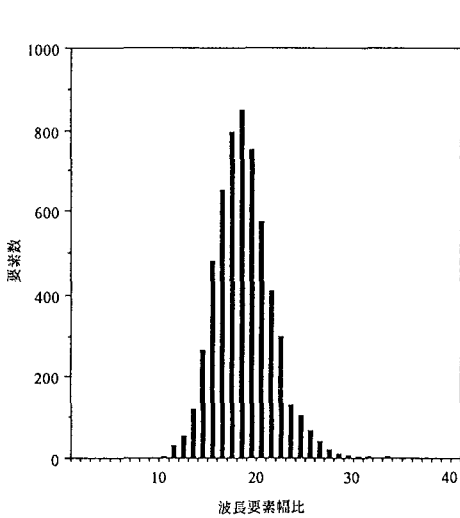


図-12 波長要素幅比の分布図

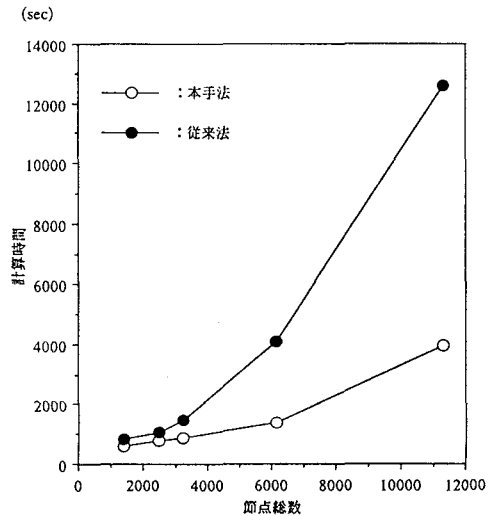


図-13 計算時間の比較

なお、計算時間は、ワークステーションNEWS-3860(20Mips)を用いて約13分であった。

次に、本手法の計算時間の面での有効性を検討するために、著者らの従来方法^[8]と、デラウニー法を適用した本手法との比較を行った。例題としては、上記の伊勢湾・三河湾を用い、周期の入力データを変えて幾つかの計算を行った。図-13に、計算時間の比較を示す。図中、横軸は節点総数、縦軸は計算時間を示している。図より、本手法の計算時間は著者らの従来方法と比較して大幅に短縮されていることがわかる。

5. おわりに

本論文において、水面波動解析のための最適自動要素分割法を提案した。本論文によって得られた結論および本手法の特徴を示すと、以下のようになる。

- 1)複雑な水深および境界形状を有する解析領域に対して、波長要素幅比を一定とする要素分割を行うことが可能となった。このことにより、高精度の解が得られる要素分割を作成することができる。
- 2)要素分割データのみならず水深データも同時に作成されるため、要素データ作成に要する労力が大幅に軽減される。
- 3)自動要素分割法の高速化を行うために、要素分割の方法として、デラウニー法を適用することの検討を行った。その結果、計算時間の大幅な短縮を図ることができた。
- 4)入力データとして与える波長要素幅比を変えることにより、節点総数を制御することができる。
- 5)波長要素幅比が一定の要素分割は、クラン数が一定の要素分割と等価なため、非定常解析に用いる場合には、計算の精度だけでなく安定性も向上することが期待できる。

謝辞：本研究を行うにあたり樋口誠君（元中央大学理工学部土木工学科学生）の協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- [1] C.C.Mei, "The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves", 740p., Jhon Wiley & Sons (1983).
- [2] O.C.Zienkiewicz and D.V.Philips, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric co-ordinate", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.3, pp.519-528 (1971).
- [3] J.F.Thompson, Z.U.A.Warsi and C.Wayne Mastin, "Numerical Grid Generation", North-Holland, Amsterdam (1985).
- [4] P.Nielsen and O.Skovgaard, "A scheme for automatic generation of boundary-fitted depth-and depth-gradient-dependent grids in arbitrary two dimensional regions", Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.10, pp.741-752 (1990).
- [5] W.C.Thacker, A.Gonzales and G.E.Putland, "A method for automating the construction of irregular computational grids for storm surges forecast models", J. Comp. Physics, Vol.37, pp.371-387 (1980).
- [6] S.H.Lo, "A new mesh generation scheme for arbitrary planner domains", Int. J. Numer.Methods Eng., Vol.21, pp.1403-1426 (1985)
- [7] I.J.Westwood and K.-P.Holtz, "Automatic optimization of irregular meshes for natural flow computation", Proc. Int. Conf. on Hydrosoft 86, pp.423-435 (1986).
- [8] K.Kashiyama and T.Okada, "Automatic mesh generation for shallow water flow", Proc. 3rd Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics, Nagoya, pp.875-881 (1989).
- [9] S.W.Sloan, "A fast algorithm for computing Delaunay triangulations in the plane", Advances in Eng., Vol.9, No.1, pp.34-55 (1987)
- [10] 谷口健男、太田親, "直線辺で構成される任意二次元領域へのデラウニー三角分割の適用"、土木学会論文集 No.432, pp.69-77 (1991)
- [11] K.Kashiyama and M.Kawahara, "Interpolation method for preparation of input data of water depth in finite element analysis of shallow water flow", Eng. Comp., Vol.2, pp.266-270 (1985)
- [12] A.Wilslow, "Numerical solution of the quasilinear Poisson equation", J. Comp. Physics, Vol. 1, pp.149-172 (1966)