開水路床の凹凸の影響により生じる水面形に関する研究

諸岡　雅樹[1]*・小石　一宇[2]・山田　正[3]

[1]中央大学大学院理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

[2]中央大学大学院理工学研究科都市人間環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

[3]中央大学理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

＊ E-mail: *m-masaki@civil.chuo-u.ac.jp*

浅水流方程式について，静水圧仮定の下，線形化した基礎方程式から導出した水面形の解析解と，非静水圧仮定の下，線形化した基礎方程式から導出した水面形の解析解どちらが精度良く水面形を求めることができるか把握することを目的とし，本研究では，3次元ポテンシャル流れかつ非静水圧仮定の下，河床凹凸に対し2次元離散フーリエ変換を行い，河床凹凸を波数成分に変換し，変換した波数成分を本研究で導出される基礎方程式であるラプラス方程式の基本解に組み込むことにより，水面形の解析解を導出した．また，水理実験との比較を行い，得られた解析解の妥当性を検証した．

Key Words : *Hidraulics，water surface profile，Discrete Fourier transform*

１． はじめに

河川における水面形は河道の狭窄部や河床凹凸の存在によって形状を変える．河床凹凸による影響の例として定在波(波状跳水)が挙げられる．定在波が生じると水深を増加させるが，特に河川水位が上昇する洪水時において，水面に定在波が形成された場合，堤防を越流し河川氾濫の一因となることが懸念される．以上のことから河床の凹凸の影響により生じる水面形の全容を把握することは治水計画上重要である．

上記の水面形の全容を把握するために，著者らは浅水流方程式について線形化した基礎方程式かつ静水圧仮定の下導出した水面形の解析解と，線形化した基礎方程式かつ非静水圧仮定の下導出した水面形の解析解どちらが精度良く水面形を求めることができるか把握することを目的とし，摩擦抵抗や渦粘性，渦拡散を考慮しない最もシンプルな場合の流れを考え，水深に比べて十分小さい凹凸が存在する開水路流れにおいて，静水圧仮定の下，摂動法により線形化した連続式および運動方程式を用いるが，この２次元の不等流の基礎式に対し適当な変換を行うことでポアソン方程式の形にし，水面形の解析解を導出した [1]．この解析解は畳み込み積分の形をしている．

本研究では，3 次元ポテンシャル流れかつ非静水圧仮定の下，河床凹凸に対し２次元離散フーリエ変換を行い，河床凹凸を波数成分に変換する．この，変換した波数成分を河床が sin × cos の形状をしている場合の 3 次元ラプラス方程式の基本解に組み込むことにより，水面形の解析解を導出した．また，水理実験との比較を行い，得られた解析解の妥当性を検証した．

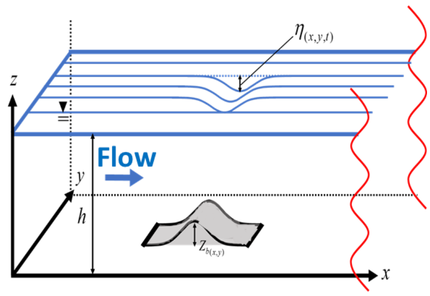

図-1 凹凸が存在する開水路流れの模式図

２．河床凹凸により生じる水面形の解析解の導出

２−１．速度ポテンシャルを用いて導出した解析解

本研究で対象とする開水路流れは，水深に比べ微小な凹凸が河床に存在する流れを対象とする．模式図を図-1に示す．ここで，3次元ポテンシャル流れを仮定した際の連続式であるラプラス方程式と速度ポテンシャルを(1)式および(2)式に示す．

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

$$\Phi_{(x,y,z)}=Ux+\phi_{(x,y,z)} \tag{2}$$

(2)式における $\varphi_{(x,y,z)}$は河床凹凸によって生じる微小な擾乱を示す速度ポテンシャルである．この速度ポテンシャル $\varphi_{(x,y,z)}$ を x，y，z で微分することにより，河床凹凸により

生じる微小な流速の各方向成分となる．また，(1)式および(2)式に示す3次元ポテンシャル流れに対する力学的境界条件は(3)式，運動学的境界条件は(4)式および(5)式である．水面を $z=0$ とする．

$$z=0: \quad g\eta+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}=const. \tag{3}$$

$$z=0: \quad U\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{4}$$

$$z=-h: \quad U\frac{\partial Z_{b(x,y)}}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{5}$$

h は等流水深[m]，$\eta_{(x,y)}$ は凹凸によって生じる水面の変位[m]，$Z_{b(x,y)}$ は凹凸の高さ[m] ($h>>Z_b$)，U は流速[ms^{-1}]，g は重力加速度[ms^{-2}]，また，流れは定常とする．(5)式中の河床凹凸の高さ $Z_{b(x,y)}$ を(6)式に示す．これは，任意の凹凸の関数 $f_{(x,y)}$ に対して離散フーリエ変換を行い，凹凸を波数成分に変換したものである．ここで，(7)式に示す $F_{(p,q)}$ は河床凹凸のフーリエ変換データ，p は x 方向の河床凹凸の波数，q は y 方向の河床凹凸の波数，m は x 座標のメッシュ番号，n は y 座標のメッシュ番号，N は縦，横のメッシュ数である．

$$Z_b(m,n)=-h+\frac{1}{N^2}\sum\sum F(p,q)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}mp\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}nq\right) \tag{6}$$

$$F(p,q)=\sum\sum f(m,n)\exp\left(-\frac{2\pi i}{N}mp\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{N}nq\right) \tag{7}$$

以上の境界条件の下で(1)式を解くと，(8)式に示す速度ポテンシャル Φ および(9)式に示す河床凹凸により生じる水面形の解析解がそれぞれ得られる．

$$\Phi=Ux-\frac{iU}{N^2}\Sigma\Sigma\frac{\cosh(\beta z)+\left(Fr^2k^2h/\beta\right)\sinh(\beta z)}{\sinh(\beta h)-\left(Fr^2k^2h/\beta\right)\cosh(\beta z)}kF(p,q)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}mp\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}nq\right) \tag{8}$$

$$\eta=-\frac{1}{N^2}\Sigma\Sigma\frac{U^2k^2F(p,q)}{\beta\left\{\sinh(\beta h)-\left(Fr^2k^2h/\beta\right)\cosh(\beta z)\right\}}\exp\left(\frac{2\pi i}{N}mp\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{N}nq\right) \tag{9}$$

ここに，k は流下方向における河床凹凸の波数であり，l は幅方向における河床凹凸の波数である．k および l を以下(10)，(11)式に示す．また，β は k と l により決まる合成波数である．β および上流側の凹凸により生じる擾乱の影響を受けない地点におけるフルード数 Fr を以下(12)，(13)式に示す．

$$k=2\pi p/N \tag{10}$$

$$l=2\pi q/N \tag{11}$$

$$\beta=\sqrt{k^2+l^2} \tag{12}$$

$$Fr=U^2\big/\sqrt{gh} \tag{13}$$

2-2．摂動法を用いて導出した解析解

以下では静水圧仮定の下，摂動法により線形化した連続式および運動方程式を用いて，水面形の解析解を導出する．連続式を(14)式，運動方程式を(15)，(16)式に示す．

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial(uH)}{\partial x}+\frac{\partial(vH)}{\partial y}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{16}$$

$$H=h+\eta-Z_b \tag{17}$$

$$u=U+u' \quad , \quad v=v' \tag{18}$$

ここに，u，v は流速の x，y 方向成分である．また，u'，v' はそれぞれ河床凹凸により生じる微小な速度の x，y 方向成分である($U>>u'$，v')．H は水位である．以上の式に関して線形化を行い，整理したものが(19)，(20)，(21)式である．

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+h_0\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)=U\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{20}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}=-g\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{21}$$

上記の，線形化を行った連続式および運動方程式を用いて，定常流れ，静水圧近似の下，式変形を行うと(22)式になる．

$$\left(1-Fr^2\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=-Fr^2\frac{\partial^2 Z_b}{\partial x^2} \tag{22}$$

ここで，(23)式で示す元の流下方向の座標 x と Froude 数 Fr によって決まる新たな座標系 x_1 を用いると(22)式は(24)式となる．η_1 (x_1，y)は座標変換後の水面の変位である．

$$x_1=x\big/\sqrt{1-Fr^2} \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\eta_1}{\partial y^2}=-Fr^2\frac{\partial^2 Z_b}{\partial x_1^2} \tag{24}$$

(24)式はポアソン方程式の形をしており，境界条件は隆起から無限遠で隆起によって生じる影響を受けない(x_1，$y\to\infty$，$\eta_1\to 0$)としてあるので，2次元空間に存在する隆起による影響(応答)は，点電荷によるポテンシャルと同じ形であると考えられる．そのため，(25)式で示す畳み込み積分を行い座標変換後の水面形 η_1 を求める．

$$\eta_1=\frac{Fr^2}{1-Fr^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\left\{-\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(y-\zeta\right)^2}\right\}\frac{\partial^2 Z_b\left(\xi_1,\zeta\right)}{\partial\xi_1^2}d\xi_1 d\zeta \tag{25}$$

ξ_1，ζ はそれぞれ x_1，y 軸方向に関する隆起の位置である．また，(26)式に示す関係から(25)式は(27)式となる．

$$\xi_1=\xi\big/\sqrt{1-Fr^2} \tag{26}$$

$$\eta_{(x,y)}=\frac{-Fr^2}{2\pi\left(1-Fr^2\right)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 Z_{b(\xi,\zeta)}}{\partial\xi^2}\log\sqrt{\frac{1}{1-Fr^2}\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\zeta\right)^2}\,d\xi d\zeta \tag{27}$$

3．水理実験(検証実験)

前章で導いた水面形の解析解である(9)式および(27)式の妥当性を検証するために，開水路実験を行った．実験には全長 8 m，幅 60 cm で河床勾配を変えることのできる開水路を用いた．以下(28)式に用いた河床凹凸を示す．

$$f_{(x,y)}=2.0\exp\left(-\frac{x^2}{300}\right)\left(Unitstep[y+3]-Unitstep[y-3]\right) \tag{28}$$

河床凹凸は実験水路下流端から5 m 地点に設置し，河床凹凸の中央，中央から左側 9 cm の計2測線の水深を河

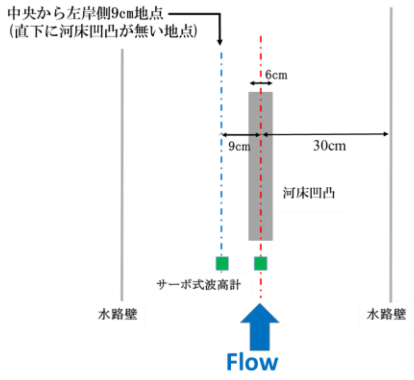

図-2 実験の模式図

床凹凸の頂点を原点として上，下流側にそれぞれ 2 m，計 4 m の区間に対してサーボ式波高計を用いて計測した．実験の模式図を図-2 に，実験の条件を表-1 にそれぞれ示す．

４．結果・考察

図-3 に実験により得た結果と解析によって得た結果を示す．3 次元ポテンシャル流れかつ非静水圧仮定の下導出した解析解に着目すると，実測値より水面の変化が大きく出ている．これに対して，摂動法(線形化)を用いて導出した解析解は実測値より水面の変化が小さく出ている．また，中央から左岸側 9 cm，すなわち水路側壁に近づくにつれ，両解析解と実測値との差が大きくなる．これは実験水路の側壁に衝突した流れにより，水面の変化が生じたと考えられる． 河床凹凸の影響によって生じる水面の実測値，および両解析解の凹凸の位置に着目すると，水面変化の値はそれぞれ異なるが，本研究で導いた解析解(9)式および(27)式双方の位置は一致しており，本研究で導いた解析解は実験時に開水路で発生させた水面形の傾向を捉えていると考えられる．また，実測値に着目すると，上流から下流にかけて水深が徐々に減少している．これは実験水路下流端における段落ちによる影響である．今後，河床凹凸の形状を変えて比較を行う必要がある．

表-1 実験の条件

河床凹凸の形状	流量 [L/分]	凹凸最長部高さ [cm]	上流側等流水深地点のFroud数	凹凸全長 [cm]	凹凸幅 [cm]
(20)式	1500	2	0.58	80	6

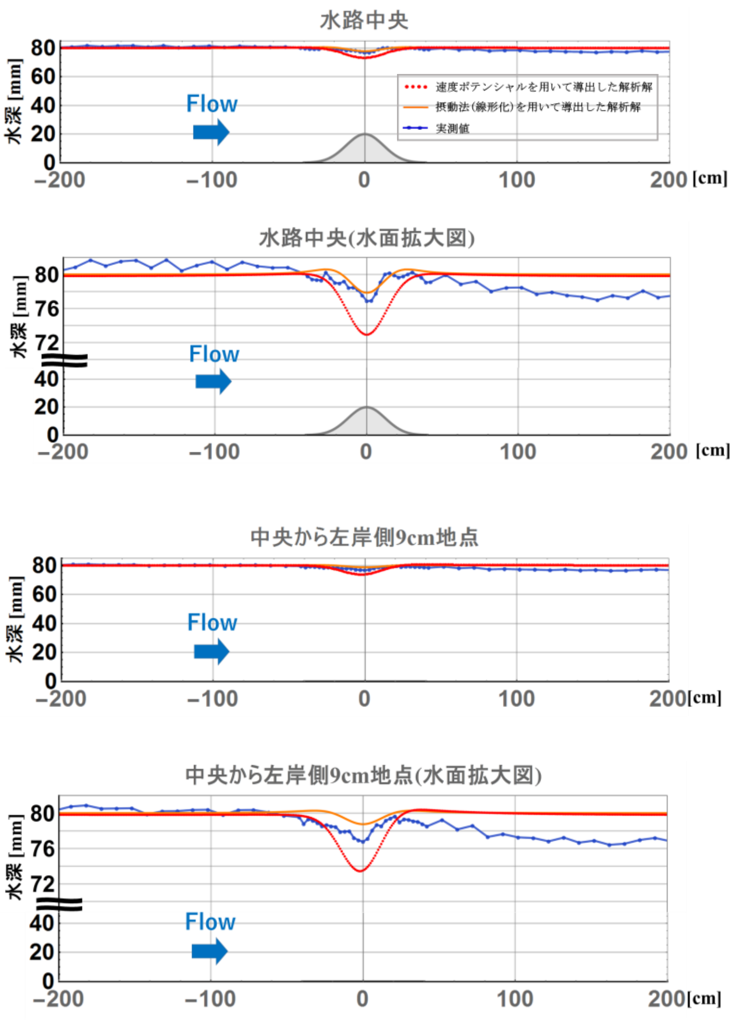

図-3 実験結果

５．まとめ

1) 3 次元ポテンシャル流れかつ非静水圧仮定の下，河床凹凸に対し 2 次元離散フーリエ変換を行い，河床凹凸を波数成分に変換する．この，変換した波数成分を河床が sin × cos の形状をしている場合の 3 次元ラプラス方程式の基本解に組み込むことにより，水面形の解析解を導出した．

2)本研究で求めた解析解と，水路実験による実測値との比較を行い，求めた解析解の妥当性を確認した．

６．参考文献

1)銭潮潮，山田正：開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究，水利科学 No. 336，65-99，2014.
2)諸岡雅樹，山田正：開水路床に存在する単一隆起の影響によって生じる水面形に関する研究，土木学会第 71 回年次学術講演会，Ⅱ-090，2016.
3)山田正，日比野忠史，中津川誠：流域スケールの風の場の計算法に関する研究，土木学会論文集 No. 503/Ⅱ-29，pp. 49-58，1994. 11