

確率限界法検定に基づく 確率水文量の信頼区間に関する研究

清水 啓太^{1*}・山田 正²・山田 朋人³

¹学生会員 中央大学大学院理工学研究科都市人間環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1- 13- 27）

²フェロー会員 中央大学教授 理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1- 13- 27）

³正会員 北海道大学准教授 大学院工学研究院環境フィールド工学部門
（〒060-8628 北海道札幌市北区北十三条西8丁目）

* E-mail:a13.8nx5@g.chuo-u.ac.jp

水文統計学の目的は一般的に、対象とする水文現象の極値資料に適合する確率分布を用いて、確率年評価を行い、計画規模に相当する確率水文量を決定することである。従来型の水文統計学では、主に、極値水文資料に対して良い適合度を示す確率分布の推定が重視されている。しかし、未曾有の豪雨をもたらす水文量は過去の極値水文資料から定めた確率分布を大きく外れることがあり、このような豪雨を評価する手法は従来の水文統計学において確立されていなかった。本研究では、水文統計学に確率水文量の信頼区間を導入することで未曾有の豪雨を評価する理論的枠組みを示すことを目的としている。

Key Words : *extreme value statistics , probability limit method, confidence interval*

1. はじめに

水文統計学において、既往の降水量や河川流量等の極値水文資料を統計解析することで、計画規模若しくは目標とする規模の降水量や河川流量等を推定する手法を水文頻度解析という。水文頻度解析の一般的な手順を次に示す。1)解析の対象となる極値水文資料（対象とする極値水文量の時系列データ）から経験分布を作成する。経験分布とは過去の観測値を昇順に並び替え、各観測値の順序に応じた累積確率をプロットし、位置式により与えることで定まる関数のことである。2)経験分布と適合する確率分布を推定する。この確率分布には極値分布や指数分布、一般パレート分布などが用いられる。ここで、用いる確率分布は対象とする極値水文資料の種類に依る。極値資料は主に、毎年資料と非毎年資料に分類することができる。例えば、毎年資料（ある河道地点の年最大流量のように、毎年一個得られる極値水文量の時系列データ）は主に、極値分布等に従うとして解析が行われる。また、非毎年資料（ある閾値を超過あるいは非超過する極値水文量から構成される時系列データ）は主に、指数分布や一般パレート分布等が用いられる。3)仮定した確率分布から任意の確率年に相当する確率水文量を定める。

代表的な水文量として、降雨量及び降水量を例にとる

と、近年、日本各地においてこれまでに経験したことのないような極めて規模の大きな豪雨が生起している。例えば、平成27年9月関東・東北豪雨では五十里雨量観測所における二日間の降雨量は既往最大値となる613mmを記録した。また、北関東から東北において記録的な大雨が各所で観測され、鬼怒川では堤防が決壊した。また、平成28年8月北海道豪雨では、8地点の雨量観測所で、史上最大の24時間降水量が記録された。

上述したような記録的豪雨の観測値は、確率紙に記入された際、過去の極値水文資料から定めた確率分布から大きく外れることが非常に多い³⁾。すなわち、ある確率年において、記録的豪雨の観測値と確率分布が定める推定値の差は極めて大きくなる。さらに、記録的豪雨の観測値が有する確率年を確率分布から推定すると、数百年、数千年といった値になることがある。このような観測値はしばしば、想定外という評価がなされてきた。しかし、過去の極値水文資料から定めた確率分布は未曾有の豪雨よりも平年の最大値に対して良い適合度を示す。このため、確率分布が示す値を当該現象の平均値と考え、激甚災害が有する外力や発生頻度は常に確率分布からのはずれの現象であると解釈することができる。したがって、設計外力を決定する際、確率分布が示す値を採用することは決定論的であり、必ずある確率を持って推定値

を超過する豪雨が生起するということを考慮する必要があることを本研究では提案する。

本研究では、確率水文学の統計的予測を行う理論的枠組みを提示する。この理論により、未曾有の豪雨を評価することが可能となる。また、統計的予測とは現在までに得られている観測値を統計解析することで外挿を行い、将来の観測値を推定することである。本研究では統計的予測を行うために、水文頻度解析に信頼区間を導入し、従来は決定論的に定められてきた確率水文学量を「設定した確率分布が示す値を平均値とし、分布をする量」という概念に拡張した。

また、既往研究¹⁰⁾においては予測区間を議論したが、本研究では、信頼区間を扱うこととする。

2. 信頼区間の概念及び定式化

観測されたデータ X を用いて、数理モデル $Y=f(x)$ を定める。ここで、数理モデルの下限値 $l(X)$ 及び上限値 $u(X)$ を推定し、新たな x に対応する Y の平均値 μ を予測する区間（すなわち、 μ の信頼区間）を構成することを区間推定という。(1)式に、竹村⁹⁾による区間推定の定義を示す。

$$P(l(X) \leq \mu \leq u(X)) \geq 1 - \beta \quad (1)$$

このとき、区間 $[l(X), u(X)]$ を信頼係数 $1 - \beta$ の信頼区間（以降、 $100(1 - \beta)\%$ 信頼区間と記述する）という。ここで、 $0 < \beta < 1$ である。信頼区間の意味を、信頼係数が 0.95 である場合を例として挙げ、次に示す。95% 信頼区間とは、大きさ n の標本を幾度も取ったと想像するとき、得られるすべての信頼区間の 95% 以上が μ を含むという性質をもつ区間である。ここで、これは割合としてであり、ある一つの信頼区間の中に、 μ が含まれるか否かは確定的に定めることはできない。しかし、 μ が含まれる可能性は 95% 以上であると信頼して良い⁹⁾。

また、95% 信頼区間とは、同様の観測を任意の回数分だけ実施した場合、得られる数理モデルのうち 95% 以上が存在する範囲である。

3. 研究手法

本研究では、信頼区間を森口⁹⁾により提案された確率限界法検定に基づき導出した。信頼区間と仮説検定には極めて密接な関係が存在する。すなわち、信頼区間は仮説検定を行う際、仮説の有意性を判定する基準としての機能をもつ。また、信頼区間に対応する仮説検定がもつ検定力（誤った仮説を棄却する確率）に応じてその幅が変化する。すなわち、使用する検定がもつ検定力が高いほど、信頼区間の幅は狭まり、予測の精度は向上する。

水文統計学では極値資料から定めた確率分布において、極端現象に相当する分布の裾部を重視する。これは、適

用する確率分布によって計画規模あるいは目標とする規模の確率水文学量が大きく変化するためである。極端現象の予測を行う場合、仮定した確率分布の両端部に対して高い検定力を持つ検定を選ぶ必要がある。そのため、本研究では、仮定した確率分布の両端部に対して極めて高い検定力を持つ確率限界法検定に基づき信頼区間を導出した。ここで、確率限界法検定の概要を以下に示す。確率限界法検定とは累積分布関数の仮説検定として広く用いられている Kolmogorov-Smirnov 検定が有する両端部での検定力の低さを改善した検定手法として森口⁹⁾により提案された。

確率限界法検定の検定手法の概略を次に示す。この検定では仮定した確率分布の確率表現関数の両側に確率限界線を作成し、観測値が両線により定まる幅の外に出た際、有意な差があると判定する。

3-1. 確率表現関数の概要及び性質

累積分布関数 $F(x)$ の関数型を(2)式、確率表現関数 $\chi(u)$ の関数型を(3)式に示す。

$$u = F(x) \quad (2)$$

$$x = \chi(u) \quad (3)$$

ここに、 x ：確率変数の値、 u ：累積確率である。森口は、確率表現関数を数理統計学に導入し、その有効性を示した⁷⁾。次に、確率表現関数の性質を示す。確率表現関数は定義域に生起する値（累積確率 u ）が区間 $[0, 1]$ の一様分布（以下、標準一様分布とする）に従う。確率限界法検定では確率表現関数が有するこの性質を利用する。

3-2. 確率限界法検定

この章では、確率限界法検定の理論を示す。確率限界法検定では、まず、標準一様分布に従う乱数を観測値の総数 n と同数だけ発生させ、これらの乱数から成る標本を任意の数だけ作成する。ここで、本研究では標本数 1000、観測値の総数を 54 個としたことから、これらの値を例として検定の理論を示す。作成した 1000 組の標本について、各標本を構成する n 個の乱数を昇順に並び替え、1000 組の順序統計量を作成する。ここで、順序統計量とは母集団から抽出した大きさ N の標本 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を昇順に並び替えることで定まる統計量 $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}\}$ である。ここで、括弧で囲まれた添え字 i は標本値を小さい順に並び替えた際の小さい方からの順位である。標準一様分布に従う乱数から作成した順序統計量について、第 i 順序統計量 $x_{(i)}$ は母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布に従うため、(4)式が成立する。

$$F_{X(i)} = I_x(i, n-i+1) \quad (4)$$

ここに、 i ：標本値を小さい順に並び替えた際の小さい方からの順位、 $x_{(i)}$ ：第 i 順序統計量、 n ：観測値の総数、

F_{X_0} ：第 i 順序統計量 x_0 の累積分布関数， $I_x(i, n-i+1)$ ：母数 $(i, n-i+1)$ のベータ分布の累積分布関数である．また，第 i 順序統計量 x_0 の累積分布関数は(5)式で表すことができる．

$$F_{X(i)}(x) = P(X_{(i)} \leq x) \quad (5)$$

確率 $P(X_0 \leq x)$ とは n 回の独立な試行において，確率 $P(X \leq x)$ の事象が i 回以上発生することに等しいため，(6)式が成立する．

$$\begin{aligned} F_{X(i)}(x) &= \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} P(X \leq x)^j (1 - P(X \leq x))^{n-j} \\ &= \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで，標準一様分布の場合， $F(x)=x$ であるから(7)式が成立する．また，確率限界値を算出する際，数値計算が容易となることから，(7)式を用いる．

$$F_{X(i)}(x) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \quad (7)$$

また，(4)式～(7)式が示す確率が α と等しくなる際の確率変数の値 x を下方確率限界値 $z_L(i)$ とする．また，(4)式～(7)式が示す確率が $1-\alpha$ と等しくなる際の確率変数の値 x を上方確率限界値 $z_U(i)$ とする．ここに， $z_L(i)$ と $z_U(i)$ は標準一様分布における確率限界値である．また， α とは確率限界値を導出するための確率である．

確率 α の導出手順を以下に示す．

$$\alpha_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min \left[\begin{array}{l} I_x(i, n-i+1), \\ I_{1-x}(n-i+1, i) \end{array} \right]_{x=X_{(i)}} \right\} \quad (8)$$

ここに， $I_x(i, n-i+1)$ ：第 i 順序統計量 x_0 の非超過確率， $I_{1-x}(n-i+1, i)$ ：第 i 順序統計量 x_0 の超過確率である．また，図-1に第 i 順序統計量 x_0 が従うベータ分布の確率密度関数と x_0 がもつ非超過確率及び超過確率を示す．ここで，式(8)がもつ数学的意味を以下に示す．

「第1～ n 順序統計量 $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ がもつ非超過確率及び超過確率をそれぞれ比較し，どちらか小さい方を抽出することで， n 個の確率を得る．このとき，求めた n 個の確率のうち，最小値を $\alpha_{\min}$ とする．」

次に，式(8)が示す操作を，作成した1000組の順序統計量について行い，1000個の $\alpha_{\min}$ を得る．ここで，後の計算を簡単にするために，1000個の $\alpha_{\min}$ をそれぞれ $-\log_{10}(2\alpha_{\min})$ という関数型に変形する．次に，1000個の $-\log_{10}(2\alpha_{\min})$ から順序統計量 $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$ を作成する．ここに， $x = -\log_{10}(2\alpha_{\min})$ である．また，(9)式に示すプロットングポジション公式により各順序統計量 $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ に対応する累積確率を定める．

$$u_i = \frac{i - a}{n + 1 - 2a} \quad (9)$$

ここに， i ：標本値を小さい順に並び替えた際の小さい方からの順位， n ：観測値の総数， a ：定数 ($a=0.5$) である．図-2は1000個の $-\log_{10}(2\alpha_{\min})$ から作成した経験的表現関数を示したものである．この図から，1000個の確率 $\alpha_{\min}$ のうち，極端な値（極めて0に近い値または極

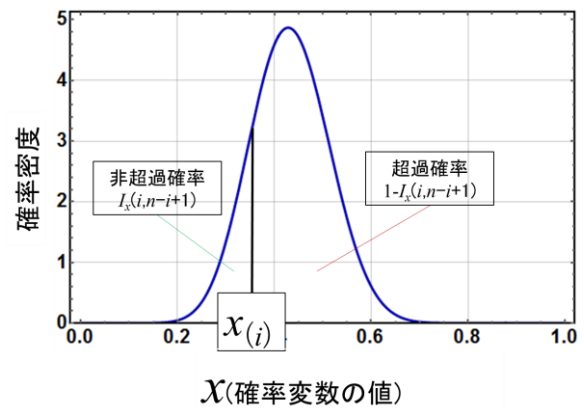


図-1 第 i 順序統計量 x_0 が従うベータ分布の確率密度関数及び第 i 順序統計量 x_0 がもつ非超過確率と超過確率

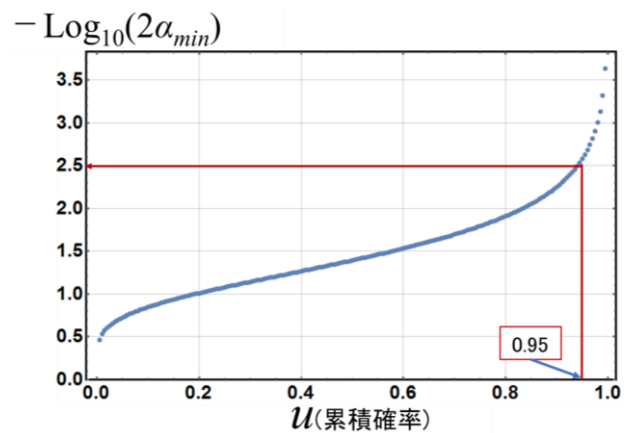


図-2 1000個の $-\log_{10}(2\alpha_{\min})$ から作成した経験的表現関数 ($n=54$, $x = -\log_{10}(2\alpha)$)

めて1に近い値)の発生確率と解釈できるものは当該確率表現関数において累積確率 u が1に近い範囲に存在することがわかる．以上の事柄を踏まえ，両側確率5%で確率限界法検定を行う手順を次に示す．

(1) 両側確率5%で検定を行う場合，この有意水準に対応した確率限界線を導出する必要がある．この場合，両確率限界線が定める幅は極端な値のうち，5%分を除いたものとなる．そのため，図-2から，極端な値の発生確率を5%だけ除き，その際の閾値を確率 α と定める．すなわち，図-2において $-\log_{10}(2\alpha) \div 2.5$ より，両側確率5%の場合の確率 α は約0.0015であることがわかる．

(2) 手順(1)で求めた確率 α と(7)式を用いて標準一様分布における確率限界値を求める．

(3) 観測値を当てはめた確率分布の確率表現関数 $\chi(u)$ に標準一様分布における確率限界値である $z_L(i)$ と $z_U(i)$ を累積確率 u として代入する．ここで，標準一様分布では $u=x$ が成立するため，標準一様分布における確率限界値を累積確率として扱うことができる．したがって，一般の連続分布では上方確率限界値と下方確率限界値はそれぞれ $\chi(z_U(i))$, $\chi(z_L(i))$ となる．ここに， $\chi(z_U(i))$ と $\chi(z_L(i))$ は一般の

連続分布における確率限界値である。上方確率限界線は $(u_i, \chi(z_u(i)))$ を線形補間した曲線であり、下方確率限界線は $(u_i, \chi(z_l(i)))$ を線形補間した曲線である。図- 3は利根川水系八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及びこれら54個の値を当てはめたGumbel分布の確率表現関数、両側確率5%で確率限界法検定を行う場合の確率限界線を示したものである。図- 3から、累積確率 u が1に近づくほど、両確率限界線が定める区間が広がることがわかる。

4. 確率限界法検定に基づく信頼区間の導出手法

両側確率5%の場合、両確率限界線の幅は前述したように、発生しうる極端な値を5%分だけ除き、定めた区間である。したがって、本研究では、この区間は95%信頼区間（各標本から定まる確率分布モデルの95%が通る範囲）と本質的に等しいとみなす。本研究では、 $(u_i, \chi(z_u(i)))$ と $(u_i, \chi(z_l(i)))$ を採用した確率分布の確率表現関数と同じ関数型で外挿したものをそれぞれ信頼区間の下限側、信頼区間の上限側とした。また、本研究では1000個の $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{\min})$ をGumbel分布に当てはめ、図- 4に示す確率表現関数を求めた。この確率表現関数から任意の信頼区間に相当する確率 α を求めることができる。ここで、1000個の $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{\min})$ を極値分布に当てはめた理由を以下に示す。 $\alpha_{\min}$ は(8)式において、導出した n 個の確率の最小値であった。一方、 $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{\min})$ は、前述した n 個の確率を同様な関数型に変換した場合、変換された n 個の確率の最大値となる。最大値の確率分布は標本数が多いほど、極値分布に漸近することが極値理論により示されているため、1000個の $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{\min})$ について極値分布を用いることは妥当であり、本研究では、Gumbel分布を用いた。図- 5は利根川水系八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及びこれら54個の値から推定したGumbel分布の確率表現関数、95%信頼区間を示したものである。この図から、95%信頼区間は図- 3に示した両側確率5%に対応する確率限界線を良く表していることがわかる。

5. 確率限界法検定に基づく信頼区間を導入した水文頻度解析の概要

図- 6は利根川水系八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及びこれら54個の値を当てはめたGumbel分布、95%信頼区間を記入した確率紙である。ここで、95%信頼区間とは、同様の観測を任意の回数だけ実施した場合、得られる確率分布モデル（本研究ではGumbel分布）のうち95%が存在する範囲である。したがって、将来の観測値を確率水文量（信頼区間の内部に存在しうるGumbel分布が示す値）と仮定した場合、この

X (確率変数の実現値)

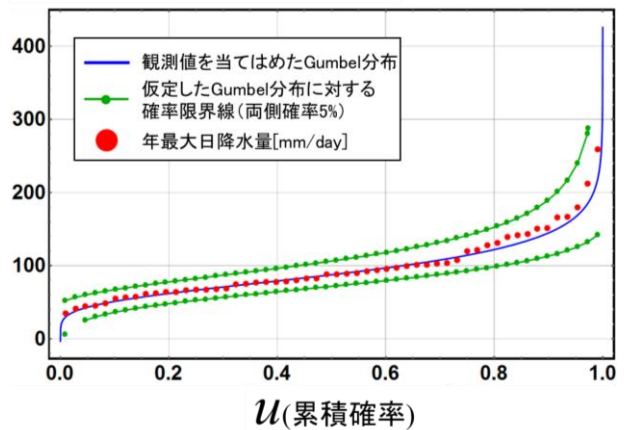


図-3 八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及びこれら54個の観測値を当てはめたGumbel分布の確率表現関数、確率限界線（両側確率5%）

X (確率変数の値)

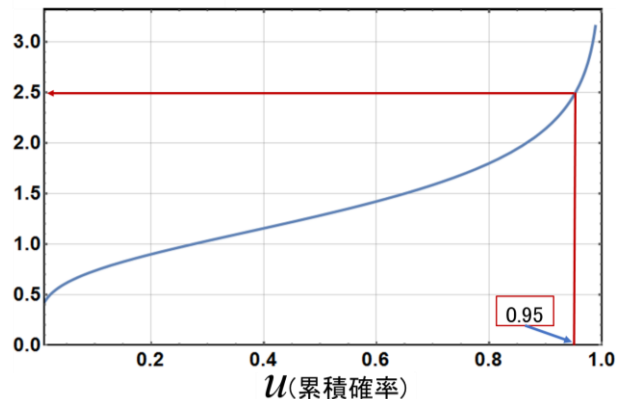


図-4 1000個の $-\text{Log}_{10}(2\alpha_{\min})$ を当てはめたGumbel分布の確率表現関数（ $n=54$, $x=-\text{Log}_{10}(2\alpha)$ ）

X (確率変数の実現値)

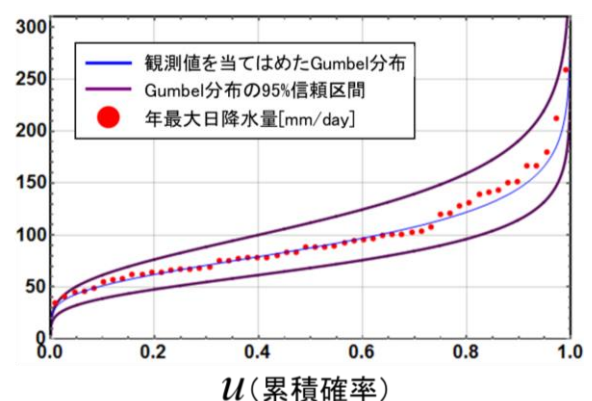


図-5 八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及び、これら54個の観測値を当てはめたGumbel分布の確率表現関数、95%信頼区間

値のうち95%以上は図示した信頼区間の内部に生起すると考えることができる。また、図- 6から確率年が大き

くなるほど信頼区間は広がり、確率水文量は観測値を当てはめたGumbel分布が示す値を平均値として分布していることがわかる。

次に、信頼区間の具体的な用法を、観測値が採用したGumbel分布に従うと仮定し、確率年を100年、95%信頼区間を考慮した場合を例として示す。図-6において、95%信頼区間を考慮することで、将来の100年確率年最大日降水量は、0.95以上の確率で95%信頼区間[189.1, 319.5]の内部に生起すると信用することが可能となる。

従来の水文頻度解析では、採用した確率分布を大きく外れる観測値が新たに得られた際、当該値に合うような確率分布を再度推定するということが行われる場合がある。しかし、信頼区間を考えることで、このような観測値に応じて確率分布を再推定せずに、過去の観測値から定めた確率分布を用いて当該値を評価できる。この例を次に示す。図-6において300[mm/day]の年最大日降水量が新たに観測されたと仮定する。この値を、信頼区間の内部に存在しうるGumbel分布が示す確率年最大日降水量と同等とした場合、観測値を当てはめたGumbel分布を用いて当該値の確率年を推定すると1000年以上となるが、95%信頼区間を考慮することで当該値の確率年は100年程度であることがわかる。すなわち、当該値は100年確率程度の確率年最大日降水量のうち、発生頻度が平均値よりも低い値であると考えることができる。

6. 信頼区間と将来の観測値の関係

この章では、信頼係数（区間推定の信頼度）と将来の観測値の関係を示す。以降では、将来の観測値が確率水文量（確率分布モデルが示す値）であると仮定する。以下に、この関係を求めるために行った数値実験の手順を次に示す。

(1) 利根川水系八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量からGumbel分布を推定する。ここで、図-6は図-6に10個の予測区間を付記したものである。

(2) 手順(1)において、観測値を当てはめたGumbel分布に従う乱数を54個（実際の観測値と同数）だけ発生させ、これら54個の乱数を用いて経験分布を作成する。ここで、観測値が手順(1)において、定めたGumbel分布に従うと仮定すると、これら54個の乱数を疑似的な観測値とみなすことができる。

(3) 手順(2)を5000回繰り返し、5000組の経験分布を作成する。次に、各経験分布に最も適合するGumbel分布を定める。

(4) 手順(3)より得た5000組のGumbel分布を用いて、任意の確率年に相当する確率年最大日降水量を5000個だけ得ることができる。次に、これら5000個の確率年最大日降水量のヒストグラムを作成する。

本研究では、確率年を100年、200年、500年、1000年、

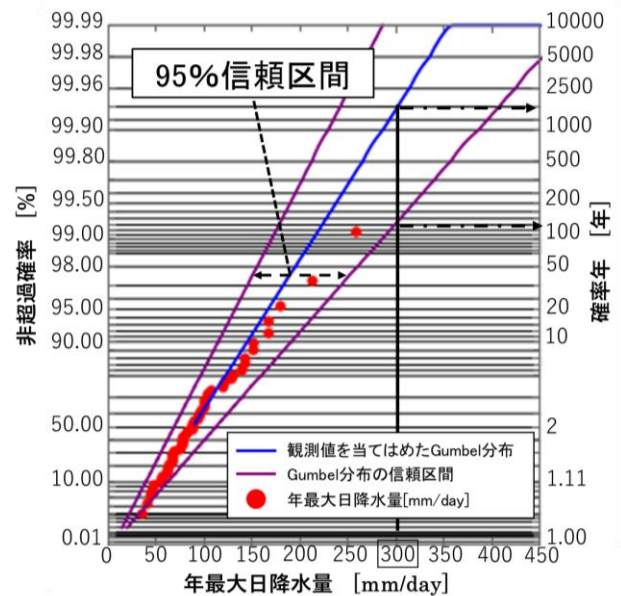


図-6 利根川水系八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及びこれら54個の観測値から推定したGumbel分布、95%信頼区間を記入した確率紙

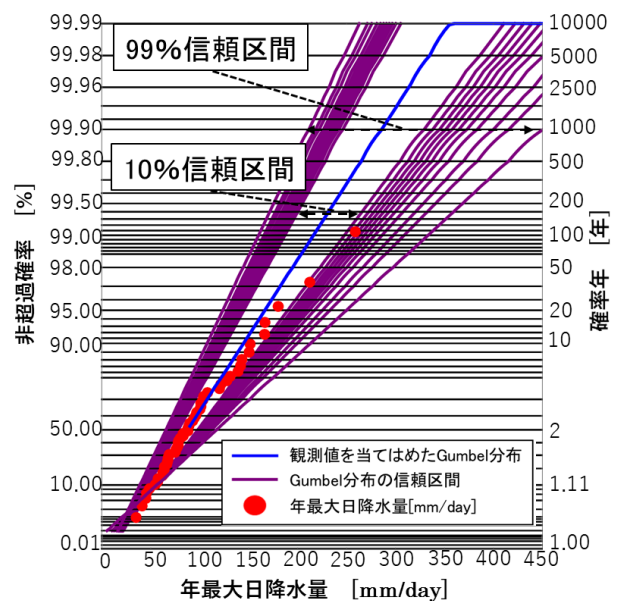


図-7 利根川水系八斗島観測所における54年間分の年最大日降水量[mm/day]及びこれら54個の観測値を当てはめたGumbel分布、10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 95, 99%信頼区間を記入した確率紙

10000年とした場合において、信頼区間に含まれる確率年最大日降水量の分布の割合を求めた。上述した仮定より、この分布はある確率年に相当する将来の観測値の分布を表している。図-8は、100年確率年最大日降水量の分布と信頼区間を示したものである。この図において、10%信頼区間に含まれる100年確率年最大日降水量の分布の割合は88.2%である。これは、また、99%信頼区間に含まれる100年確率年最大日降水量の分布の割合は約99%である。以上から、信頼係数を大きくすると、信頼

区間と信頼区間に含まれる確率水文量の分布の割合との適合度は良くなることがわかる。

このように、信頼度として大きな値をとる場合には、信頼区間は広くなり、信頼区間を狭くすると信頼度は小さくなる。すなわち、正確な推論を行おうとする場合、将来の観測値がとりうる値は広い範囲にあり、一見厳密に、将来の観測値が狭い信頼区間に落ちると推測する場合、その信頼度は小さくなる。このように信頼度（信頼係数）と信頼区間は背反の関係にある。

図-9は確率年の値が100, 200, 500, 1000, 10000の場合において、「信頼係数」と「信頼区間に含まれる確率年最大日降水量分布の割合」の関係を示したものである。この図から、任意の信頼係数における信頼区間に含まれる確率年最大日降水量分布の割合に着目すると、この割合は、確率年が増加するほど、減少する傾向をもつことがわかった。具体例を示すと、信頼係数が10%の場合、1000年確率での当該割合は100年確率での当該割合よりも約5%ほど小さくなっている。これは、データが得られた期間（本研究では、54年間）よりも、長期間のスケールで生起しうる値（例えば、1000年確率水文量等）を外挿により求めたため、予測の信頼度が減少したと考えることができる。

7. まとめ

本研究では、水文頻度解析に確率限界法検定に基づく信頼区間を導入することで、確率水文量の概念を拡張した。また、この理論により、将来の観測値が確率水文量であると仮定した場合、採用した確率分布を大きく外れる水文量を評価する理論的枠組みを示した。以下に得られた知見を示す。

- (1) 信頼区間を水文頻度解析に導入し、確率水文量が幅を持つことを理論的に示した。また、同じ確率年であっても、ある確率を持って平均値を超過または非超過する水文量が生起することを示した。
- (2) 従来の水文頻度解析では採用した確率分布を大きく外れる値を評価する手法が確立されていなかったが、信頼区間を考慮することで、そのような値を100~200年程度に相当する確率水文量として扱うことができることを示した。
- (3) データが得られた期間よりも、長期間の時間スケールで生起しうる値を外挿により推定すると、予測の信頼度が減少することを示した。

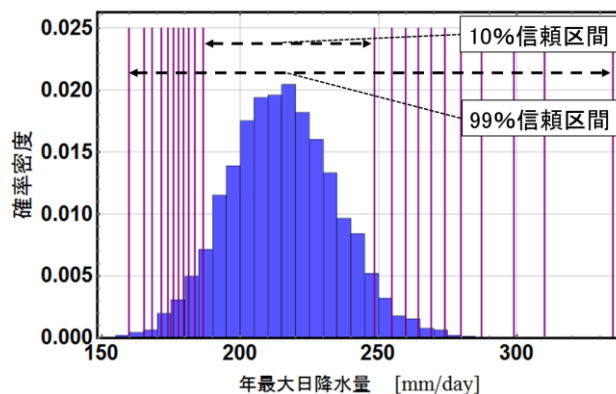


図-8 100年確率年最大日降水量の分布と信頼区間
図に記入した信頼区間は10,20,30,40,50,60,70,80,90,95,99%信頼区間である。

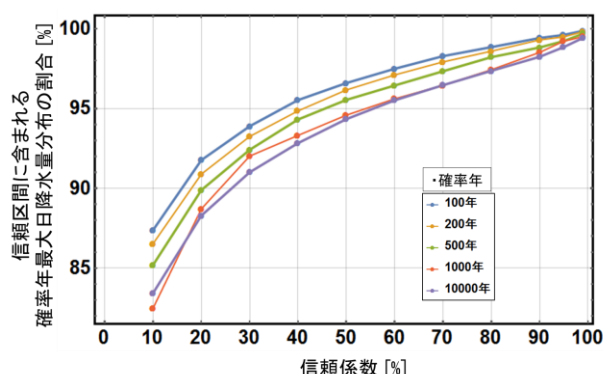


図-9 信頼係数と信頼区間に含まれる確率年最大日降水量分布の割合の関係

参考文献

- 1) 清水啓太, 山田正: 確率限界法検定に基づく極値水文量の統計的予測に関する研究, 土木学会平成 29 年度全国大会第 72 回年次学術講演集, 2017
- 2) 清水啓太, 山田正: 確率限界法検定に基づく予測区間を導入した水文頻度解析手法に関する研究, 平成 29 年度水文・水資源学会講演集, 2017
- 3) 宝馨: 水文頻度解析の進歩と将来展望, pp.740-756 水文・水資源学会誌, 1998
- 4) 竹村彰通: 現代数理統計学, pp.195-198, 創文社, 1991
- 5) 松原望: 入門統計解析 医学・自然科学編, 東京図書, 2013
- 6) 森口繁一: 確率表現関数の検定について—Kolmogorov-Smirnov 検定を考え直す—, pp.233-244 日本統計学会, 第 25 巻, 1995
- 7) 森口繁一: 確率表現関数, 東京大学出版, 1995