

開水路床に存在する隆起の影響によって 生じる水面形に関する基礎的研究

諸岡 雅樹^{1*}・山田 正²

¹中央大学大学院理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

²中央大学理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

* E-mail: m-masaki@civil.chuo-u.ac.jp

河床は横断的にも縦断的にも非一様であることがほとんどであるにも関わらず、縦断及び横断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解はない。本研究では、二次元開水路における非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解を求めるための基礎的研究として、摩擦抵抗や渦粘性、渦拡散を考慮しない最もシンプルな場合を考え、河床に水深に比べて微小な隆起が存在する開水路において摩擦抵抗や渦粘性、渦拡散を考慮しない解析解を求めた。また、導出した解析解を用いて、隆起の形状を変えることにより得られた水面形の考察を行った。

Key Words : Hydraulicss, water surface profile, linearization

1. はじめに

河川における水面は河道の狭窄部や河床凹凸の影響によって形状を変える。河床凹凸による影響の例を挙げると定在波がある。一次元開水路における縦断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解は、銭、山田¹⁾によって導かれた。しかし、実際の河川を考えると、河床は横断的にも縦断的にも非一様であることがほとんどであるにも関わらず、縦断及び横断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解はない。そこで本研究では、二次元開水路における非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解を求めるための基礎的研究として、摩擦抵抗や渦粘性、渦拡散を考慮しない最もシンプルな場合を考え、河床に水深に比べて微小な隆起が存在する開水路における解析解を求めた。また、隆起の形状を変えることにより得られた水面形の考察を行う。

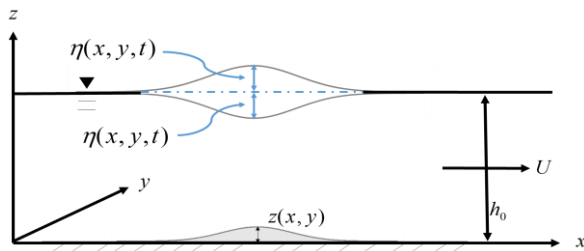


図-1 隆起が存在する開水路流れの模式図

2. 単一隆起により生じる水面形の式の導出

本研究で対象とする開水路流れは、河床に水深に比べて微小な隆起が存在する。模式図を図-1に示す。 h_0 は静水深、 η は隆起によって生じる水面の変位、 z は隆起の高さ($h_0 \gg z$)、 U は断面平均流速、 u' 、 v' はそれぞれ隆起によって生じる速度の x 、 y 方向成分である。流れは定常とする。(1)式は連続式を示す。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (U + u')(h_0 + \eta - z)}{\partial x} + \frac{\partial v'(h_0 + \eta - z)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

断面平均流速 U に比べ、隆起の影響によって生じる u' 、 v' は非常に小さい。また、 η は静水深 h_0 に比べて非常に小さい。従って U 、 u' 、 v' 、 h_0 、 η は(2)式で示す関係がある。

$$U \gg u', v', h_0 \gg \eta \quad (2)$$

(1)式における、 η と u' の積といった1オーダー小さいもの同士を微小として、線形化を行うと(3)式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = U \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (3)$$

摩擦抵抗や渦粘性、渦拡散を無視すると、 x 方向及び y 方向の運動方程式はそれぞれ(4)式と(5)式となる。 g は重力加速度である。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (5)$$

(4), (5)式を線形化を行うと(6)式, (7)式を得る.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (7)$$

ここで, (8)式に示す関係より, (3), (6), (7)式は(9), (10), (11)式に書き直すことができる.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \quad (8) \quad \frac{d\eta}{dt} + h_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = U \frac{\partial z}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{du'}{dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (10) \quad \frac{dv'}{dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (11)$$

(9)式を t で微分し, (10)式及び(11)式を代入すると, (12)式を得る.

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = gh_0 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + U \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad (12)$$

次に, (8)式を二乗し(12)式に代入する. また, 定常流れであるため(12)式は(13)式となる.

$$U^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = gh_0 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + U^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (13)$$

(13)式の変数 η , x , y , z を h_0 で除し, 無次元化を行うと(14)式を得る.

$$U^2 \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2} = gh_0 \left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y'^2} \right) + U^2 \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} \quad (14)$$

(15)式で示す *Froude* 数より, (14)式は(16)式となる.

$$Fr = U / \sqrt{gh_0} \quad (15)$$

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y'^2} = -Fr^2 \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} \quad (16)$$

ここで, (17)式で示す x と *Froude* 数 Fr によって決まる新たな座標系 x_1 を用いると(16)式は(18)式となる. $\eta(x_1, y')$ は座標変換後の水面の変位である.

$$x_1' = x' / \sqrt{1 - Fr^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_1'}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \eta_1'}{\partial y'^2} = -Fr^2 \frac{\partial^2 z'}{\partial x_1'^2} \quad (18)$$

(18)式はポアソン方程式であり, 境界条件は隆起から無限遠で隆起によって生じる影響を受けない ($x_1' \rightarrow \infty$, $y' \rightarrow 0$) ので, 二次元空間に存在する隆起による影響(応答)は, 点電荷によるポテンシャルと同じ形であると考えられ, (19)式で示す量み込み積分を行い η_1' を求める.

$$\eta_1' = \frac{Fr^2}{1 - Fr^2} \iint_V \left\{ -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x_1' - \xi_1')^2 + (y' - \zeta')^2} \right\} \frac{\partial^2 z'(\xi_1', \zeta')}{\partial \xi_1'^2} d\xi_1' d\zeta' \quad (19)$$

ξ_1' , ζ' はそれぞれ x_1' , y' 軸方向に関する隆起の位置である. また, (20)式に示す関係から(19)式は(21)式となる.

$$x_1' = x' / \sqrt{1 - Fr^2}, \quad \xi_1' = \xi' / \sqrt{1 - Fr^2} \quad (20)$$

$$\eta = \frac{-Fr^2}{2\pi(1 - Fr^2)^{3/2}} \iint_V \frac{\partial^2 z'(\xi', \zeta')}{\partial \xi'^2} \log \sqrt{\frac{1}{1 - Fr^2} (x' - \xi')^2 + (y' - \zeta')^2} d\xi' d\zeta' \quad (21)$$

この(21)式が水深に比べ, 微小な隆起により生じる水面形の解析解である.

3. 導出した解析解を用いた数値実験

導出した解析解を用いて, 開水路床に存在する隆起の形状を変えて水面形を求めた. 表-1に隆起の流下方向の形状, 隆起最頂部の高さをそれぞれ示す. 数値実験は6ケース行った. 隆起の幅は6.0cm, *Froude* 数0.58で統一した.

表-1 数値実験各条件

Case	隆起の流下方向の形状	隆起最頂部高さ[cm]
1	$1.0 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right)$	1.0
2	$1.5 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right)$	1.5
3	$2.0 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right)$	2.0
4	$1.0 \exp\left(-\frac{(80+x)^2}{300}\right) + 1.0 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right) + 1.0 \exp\left(-\frac{(80-x)^2}{300}\right)$	1.0
5	$1.5 \exp\left(-\frac{(80+x)^2}{300}\right) + 1.5 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right) + 1.5 \exp\left(-\frac{(80-x)^2}{300}\right)$	1.5
6	$2.0 \exp\left(-\frac{(80+x)^2}{300}\right) + 2.0 \exp\left(-\frac{x^2}{300}\right) + 2.0 \exp\left(-\frac{(80-x)^2}{300}\right)$	2.0

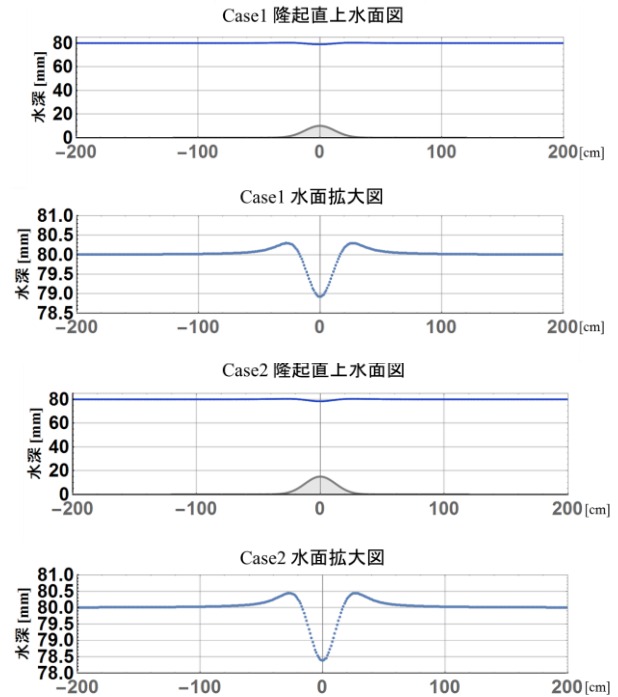


図-2 隆起直上水面図及び水面拡大図

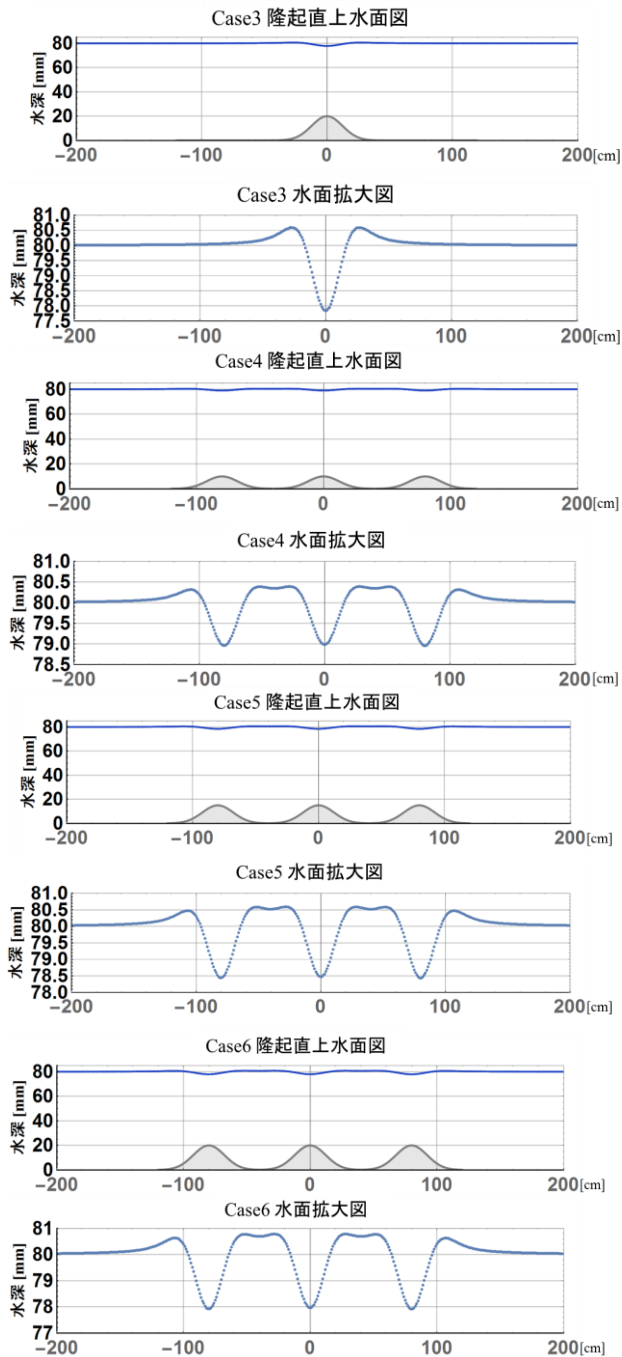


図-3 隆起直上水面図及び水面拡大図

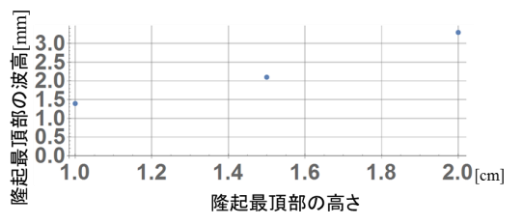


図-4 Case1からCase3における隆起最頂部の高さとの波高

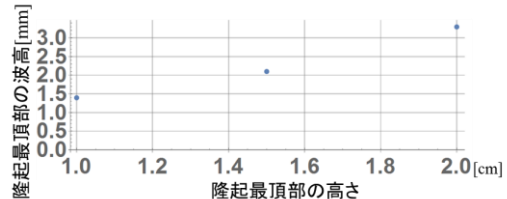


図-5 Case4からCase6における隆起最頂部の高さとの波高

4. 結果, 考察

図-2及び図-3におけるCase1から3は、単一の隆起が開水路床に存在したときの、隆起直上の水面形である。Case4から6はCase1から3で用いた隆起が3つ連続して存在しているときの隆起直上の水面形である。Case1からCase3及びCase4からCase6で生じた水面形の波長は、それぞれ用いた隆起の波長と同じ長さであることが確認できる。また、図-4はCase1からCase3における隆起最頂部の高さとの水面形の波高、図-5はCase4からCase6における隆起最頂部の高さとの水面形の波高をそれぞれグラフに表示した。図-4及び図-5から隆起が3つ連続的に存在していても、単一の隆起によって生じる水面形の波高と変わらないことが確認された。流れ方向に滑らかで、水深に比べ微小な隆起を用いたため、隆起が3つ連続的に存在していても生じる水面形相互に影響を及ぼさなかったと考えられる。

5. まとめ

本研究では、二次元開水路における非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解を求めるための基礎的研究として、摩擦抵抗や渦粘性、渦拡散を考慮しない最もシンプルな場合を考え、河床に水深に比べて微小な隆起が存在する開水路における解析解を求めた。また、導出した解析解を用いて、開水路床に存在する隆起の形状を変えて水面形を求めた。以下に本研究で得られた知見を示す。

- 1) 縦断及び横断的に非一様な河床の影響によって生じる水面形の解析解を求めた。
- 2) Case1からCase3及びCase4からCase6で生じた水面形の波長が、それぞれ用いた隆起の波長と同じ長さであることを確認した。
- 3) Case1からCase3における隆起最頂部の高さとの水面形の波高、Case4からCase6における隆起最頂部の高さとの水面形の波高を比較した。
- 4) 今後、水路実験を行い、得られた解析解と実測値の比較を行う。

6. 参考文献

- 1) 銭潮潮, 山田正:開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎研究, 水利科学No. 336, 65-99, 2014.