

パイピング現象による地表面に存在するくぼみの進行過程への考察

新妻 友太^{1*}・山田 正²

¹中央大学大学院理工学研究科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

²中央大学理工学部（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

* E-mail: nitsuma@civil.chuo-u.ac.jp

河川堤防やフィルダムの決壊要因の1つであるパイピング現象は、その発生の判定に関する研究については理論と実験の両面から多くなされてきた。その一方で、地盤中に存在する水みち（空洞）及びくぼみの時間的な形状の変化である進行過程に関する研究は少ない。本論文では地上に存在するくぼみの境界が移動する速度（浸食速度）を流速の1次式で表現し、Darcy則の成立とくぼみが半楕円形を維持しながら変形するという条件の下でくぼみの縦横比の解析解を導出した。その結果、くぼみの縦横比は時間の経過に従って指数関数的に増加することがわかった。また、くぼみの縦横比の上昇率はその初期値に大きく依存することがわかった。

Key Words : piping, velocity potential, stream function, conformal mapping, Joukowski transformation

1. はじめに

平成27年9月関東・東北豪雨の影響により、鬼怒川の堤防が決壊し、氾濫域に甚大な被害を及ぼした。鬼怒川堤防調査委員会の報告書¹⁾によるとその主な要因として、堤防を越流した水によって堤体が削り取られたことが挙げられているが、それを助長するような形でパイピング現象が発生した可能性があるとしている。パイピング現象とは空洞やくぼみ等の地中の弱点に沿って水が集中的に流れ、浸透流が及ぼす作用によって土粒子が侵食され、パイプ状の水みちが形成される現象を指し、フィルダムの主要な決壊要因の一つでもある。Foster et al.²⁾は過去の136のフィルダムの決壊事例を調査し、そのうちの約4割がパイピングに起因することを示している。

浸透破壊に関する既往の考え方としては、Justin³⁾による限界流速法や、Terzaghi⁴⁾による限界動水勾配法などの判定基準が一般的によく知られている。しかし、この方法はあくまで土粒子が移動し始める条件を表す判定式であり、浸食によって水みちが発展する過程を表すものではない。藤澤ら⁵⁾は土内部での土粒子の侵食と移動を解析するためには3つの項目（①土の間隙を通過する浸透水の流れ、②浸透流による土粒子の内部侵食、③浸透流

による土粒子の輸送）を考慮する必要があるとしている。このことから分かるように、パイピングの進行過程を評価するためには、その空洞周りの流れ場をできるだけ正確に把握することが重要であると考えられる。本論文では、佐藤ら⁶⁾が行った一様流中に置かれた井戸が流速場に及ぼす研究を利用し、地盤中に存在する空洞及びくぼみが楕円と半楕円で表現できること、浸食速度が流速に比例することを仮定した数理モデルに、その縦横比と最大流速の関係を導入し、空洞及びくぼみの縦横比の時間的進行に対する解を導出した。

2. 空洞内外流速場の設定と解析

この章では、空洞及びくぼみの変形を表現する前段階として、飽和浸透流中に存在する楕円形空洞及びくぼみの縦横比と流速場の対応関係の導出を行う。

2-1. 基礎方程式と計算に用いた仮定

全領域でDarcy則が成立する飽和浸透流を仮定する。2次元の一様流速場内に、透水係数が非常に大きい領域で表現した空洞を設置し、その内部及び外部における流

速場の解を求める。図-1 に座標系と各変数の定義、円形空洞のイメージを示す。基礎方程式は連続式にDarcy則を代入して得られるLaplaceの方程式を直交座標、極座標表示した式(1)を用いる。

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

2-2. 円形空洞周り的一様流の解析

佐藤ら⁹⁾はまず、楕円形の水みちを解析する前段階として、図-1(a)に示した円形空洞周り的一様流の解を導いた。尚、以下の議論では空洞内外の物理量に対してそれぞれ添字の*i*, *o*を付け、 u, v : x, y 方向流速[L T⁻¹], h : 全水頭[L], k : 透水係数[L T], a : 空洞の半径[L], U : 一様流速[L T⁻¹]とする。用いた条件は以下の5つである。1) 空洞の内外においてDarcy則が常に成立し、空洞内部の透水係数 k_i は空洞外部の飽和浸透流における透水係数 k_o に対して十分に大きいこと。2) x 軸に対称な流れであること。3) 空洞の内部には特異点は存在しないこと。4) 空洞の境界($r=a$)における境界の内部と外部の水頭 h_i, h_o が連続すること。5) 境界に垂直な方向の流速 u_i, u_o も連続すること。これらの条件を用いて空洞の内外の水頭 h_i, h_o について解くと、解析解(2), (3)が得られる。

$$h_i(r, \theta) = -\frac{2}{k_i + k_o} U r \cos \theta = -\frac{2}{k_i + k_o} U x \quad (2)$$

$$h_o(r, \theta) = -\frac{U}{k_o} \left(r + \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (3)$$

ここで、空洞内外の速度ポテンシャル ϕ_i, ϕ_o を以下の式(4)で定義する。

$$\phi_i = -k h_i, \quad \phi_o = -k h_o$$

続いて、流線形状を見るために半径方向の流速 u_r と流線関数 ψ の関係式(5)を利用すると、空洞内外の流線関数(6), (7)がそれぞれ得られる。

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5)$$

$$\psi_i(r, \theta) = \frac{2k_i}{k_i + k_o} U r \sin \theta = \frac{2}{k_i + k_o} U y \quad (6)$$

$$\psi_o(r, \theta) = U \left(r - \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (7)$$

式(2), (3), (4), (6), (7)より $\zeta = x + iy$ と置くと、空洞内外の複素速度ポテンシャル W は式(8), (9)で表せる。

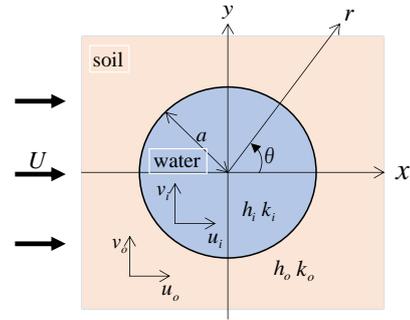


図-1 (a) 円形空洞イメージ図と変数の定義

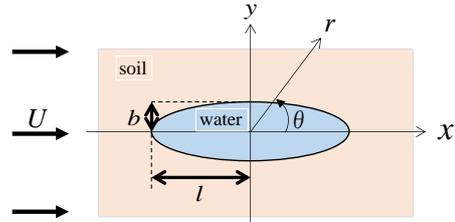


図-1 (b) 楕円形の水みちイメージ図

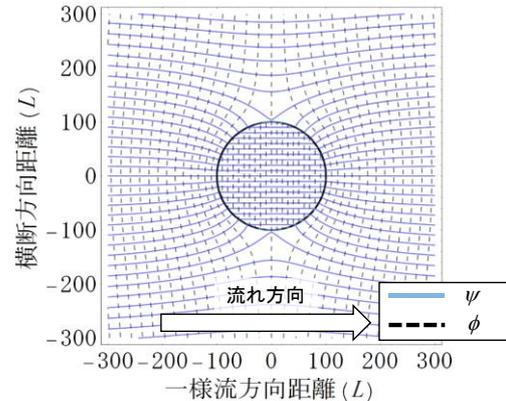


図-2 円形空洞周り流れの流線・等ポテンシャル線

$$W_i(\zeta) = 2U \frac{k_i}{k_i + k_o} \zeta \quad (8)$$

$$W_o(\zeta) = U \left(\zeta + \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (9)$$

式(8), (9)へ $a=100, U=1, k_i=1000, k_o=1$ を代入し、流線及び等ポテンシャル線を表示したものを図-2に示す。

2-3. 楕円形空洞周り的一様流の解析

次に、図-1(b)に示す楕円形にモデル化された水みち周りの流れを解くため円形空洞周り流れでの複素速度ポテンシャル W_o に対して、等角写像論のJoukowski変換(10)を行う。その結果、式(9)は楕円形空洞周り流れの複素速度ポテンシャルである式(11)へと写像される。

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \quad (10)$$

$$W_o(z) = \begin{cases} U \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 4b^2}}{2} + \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} z + \frac{2a^2}{\sqrt{z^2 - 4b^2}} \right) & (z > 0) \\ U \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4b^2}}{2} + \frac{k_o - k_i}{k_i + k_o} z - \frac{2a^2}{\sqrt{z^2 - 4b^2}} \right) & (z \leq 0) \end{cases} \quad (11)$$

式(11)を用いて、楕円形空洞において、一様流速に対して垂直方向の半軸 b を固定して一様流速方向の半軸 l との比が 1:1, 1:5, 1:25, 1:100 になるように表示した流線を図-3に示す。

3. 楕円形空洞周りの流速場の特性

つづいて、2章で得られた楕円形空洞周りの流速場の解を利用して考察を行う。

まず、図-3に示す各図の左右の対称性より、 $x=0$ における等ポテンシャル線が一様流速方向に対して垂直な直線を描くことに着目する。この線上での速度ポテンシャル ϕ_i, ϕ_o をそれぞれ0と置くと、式(4)の関係から水頭 h_i, h_o も0であることが分かる。したがって $x=0$ の等ポテンシャル線は大気圧下に存在する水平な地表面、 $x=0$ で分断された半楕円形空洞は地表面に存在するくぼみとして扱うことが可能になり、これまで空洞周りの流れとして扱ってきた理論が、地表面上に存在するくぼみ周りの流れにも拡張できることがわかる。これを図示したものが図-4である。以降では空洞はくぼみとして扱うものとする。

流線は $x < 0$ の空洞上流部（くぼみ）のみに流入している。さらに、楕円の端点 $(x, y) = (-l, 0)$ では流線の集中が見られることより、端点において流速が最大値をとることがわかる。この点に着目し、楕円の縦横比 l/b と一様流速 U で無次元化した楕円の端点での流速 u/U の関係をプロットしたグラフを図-4に示す。この図から縦横比 l/b が1である円において無次元化された流速が楕円の縦横比の2倍であった関係が、縦横比の増大に伴って比例定数1の比例関係に漸近していくことがわかる。

4. 浸食モデルを用いたくぼみの進行過程の表現

最後に、3章で得られた楕円の縦横比と一様流速で無次元化された楕円の端点での流速の関係を利用して、くぼみの進行過程についての考察を行う。

浸食速度 c をくぼみの境界がその垂直方向へ変形する速度と定義する。浸食速度 c が境界垂直方向流速 v に依存する場合、べき級数展開を用いて最も一般的に式(12)のように表現される。

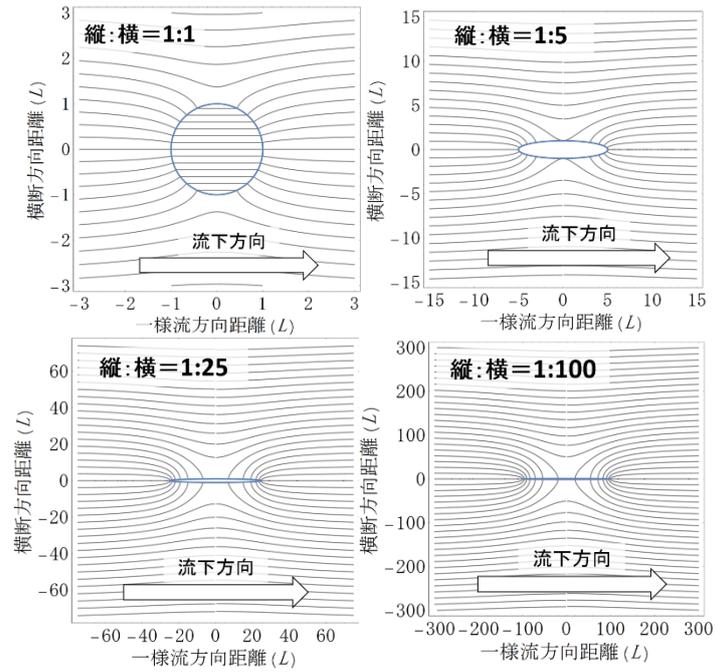


図-3 空洞の縦横比に対応する流線

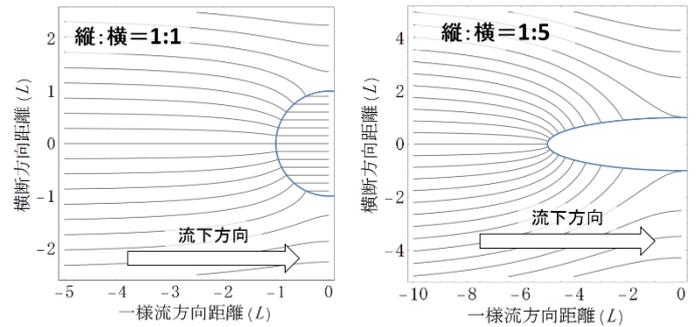


図-4 地表面のくぼみ周りの流線

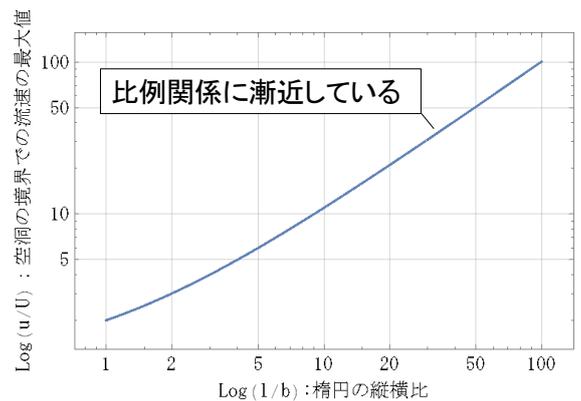


図-5 空洞の縦横比と境界での流速の最大値の関係

$$c(r, \theta, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (v - v_*)^n & (v > v_*) \\ 0 & (v < v_*) \end{cases} \quad (12)$$

ここに、 α_n : 流速と浸食速度の間の係数 [-], v_* : 浸食が

開始する限界流速 [L/T] である。今回は簡単のため $n=1$ とする式(13)を取り扱う。

$$c(r, \theta, t) = \alpha(v - v_*) \quad (v > v_*)$$

$$= 0 \quad (v < v_*) \quad (13)$$

さらに、くぼみが半楕円形を維持しながら変形する場合、浸食速度 c はくぼみの流速方向軸 l の時間に対する1階微分として式(14)で次元化され、図-5 で示した楕円の縦横比 l/b と一様流速 U で無次元化された楕円の端点での流速 u/U の関係より式(15)が近似式に利用できる。

そのイメージを図-6に示す。

$$c = \frac{dl}{dt} \quad (14)$$

$$v = \frac{U}{b} l \quad (15)$$

式(14)、(15)を(13)へ代入することで、式(13)はくぼみの流速方向軸 l に関する常微分方程式(16)となり、初期条件(17)を与えることで解析的に解くことが可能となる。

$$\frac{dl}{dt} = \alpha \left(\frac{U}{b} l - v_* \right) \quad \left(v = \frac{U}{b} l > v_* \right)$$

$$= 0 \quad \left(v = \frac{U}{b} l < v_* \right) \quad (16)$$

$$l|_{t=0} = l_0 \quad (17)$$

式(16)、(17)の解を流速横断方向軸 b で無次元化し、くぼみの縦横比 l/b 及び浸食速度 c について求めた解が式(18)、(19)である。

$$\frac{1}{b} l(t) = \left(\frac{l_0}{b} - \frac{v_*}{U} \right) e^{\alpha \frac{U}{b} t} + \frac{v_*}{U} \quad (18)$$

$$c(t) = \frac{dl}{dt} = \alpha U \left(\frac{l_0}{b} - \frac{v_*}{U} \right) e^{\alpha \frac{U}{b} t} \quad (19)$$

式(18)の初期値を変化させてプロットしたグラフを図-7に示す。また、式(18)より、このモデルを用いた結果くぼみの縦横比は指数関数的に上昇し、その上昇率はくぼみの初期縦横比 l_0/b にも大きく依存することが分かる。また、式(16)、(17)より限界流速 v_* が既知である際の浸食開始の条件が以下式で与えられる。

$$\frac{l_0}{b} > \frac{v_*}{U} \quad (20)$$

式(20)はくぼみの初期縦横比が一様流速で無次元化された限界流速を上回った際に侵食が開始することを表す。

5. 結論

地表面に存在するくぼみの進行過程を調べるため、本研究で与えた条件での解析を行い、その結果から得られた知見を以下に示す。

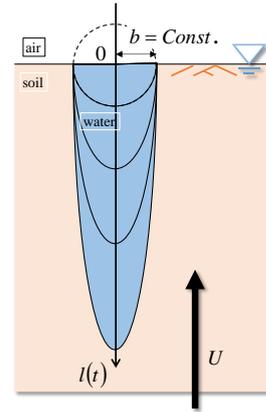


図-6 くぼみの進行模式図

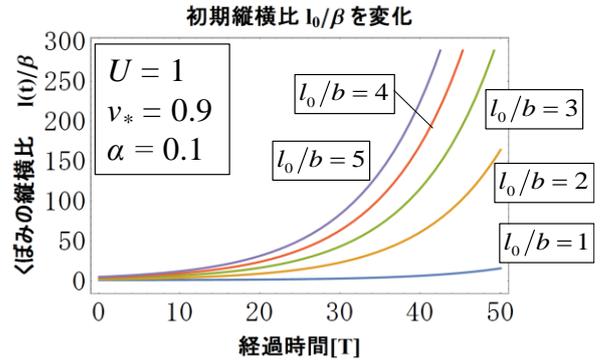


図-7 侵食が開始してからのくぼみの縦横比の時間変化

- くぼみが半楕円を維持しながら変形する場合、その縦横比は時間の経過に従って指数関数的に増加する。
- くぼみの縦横比が増加する割合はその初期値にも大きく依存する。
- 限界流速が与えられた場合の一様流速場において、くぼみの初期縦横比が一様流速に対する限界流速の比を上回ることが侵食開始の条件となる。

参考文献

- 国土交通省関東地方整備局：鬼怒川堤防調査委員会報告書, 2015.
- Foster, M. Fell, R. and Spannagle, M. : The statistics of embankment dam failures and accidents, 2000.
- J.D. Justin : The Design of Earth Dams, A.S.C.E. Trans. No.1531, 1923.
- Terzaghi, K, Der Grundbruch on Stauwerken und Seine Verhutung, 1922.
- 藤澤和謙, 村上章, 西村伸一：土の内部で生じる土粒子侵食の解析手法, 農業農村工学会論文集, 第 260 号, pp.85-93, 2009.
- 佐藤智宏, 江花亮, 山田正：一様な流れ場に設置された井戸内外の流速場に関する研究, 土木学会関東支部技術研究発表会講演概要集 34 巻, pp.02-0097, 2007.