

非静水圧を考慮した水路床非均一性による水面形に関する数値計算と実験検証

洪 尔超¹・成 岱蔚²・山田 正²

¹中央大学大学院理工学研究科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

²中央大学大学院理工学部（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

E-mail:hongerchao2012@gmail.com

水路床が非均一の場合、非静水圧を考慮して、ピカールの逐次近似法を用い、完全流体の流れの場合が渦なしの場合があるいはポテンシャル場になう流れ関数によって二次元水面形方程式の近似解を導出する。導出した方程式をN.S.Sivakumaranらの実験データと比較し、整合性を確認した。両方から非均一な水路床における非静水圧を考慮した水面形は静水圧仮定の式より実験結果の水面形をよく再現できた。また、錢ら導出した水路床非均一性による水面形解析解との評価も行った。

Key Words : open channel hydraulics, nonstatic pressure, non-uniformity riverbed, experiment

1. はじめに

静水圧分布の仮定は、流線の曲率が無視でき、あるいは水路勾配がきつなく流れの鉛直方向加速度を無視できる状態のことである。しかし、流れ現象はほとんど非静水圧であり。例えば、刃型堰やダム・クレストを越える流れは、頂部の流線の曲率の影響を無視し得ず、圧力分布は静水圧分布ではなく、非静水圧を考慮しなければならない。本研究では、水路床が非均一のとき、非静水圧を考慮して、ピカールの逐次近似法を用いて、完全流体の流れの場合が渦なしの場合、あるいはポテンシャル場になう流れ関数によって二次元水面形方程式の近似解を導出した。

2. ピカールの逐次近似法による流れ関数

ピカールの逐次近似法は極限としての初期値問題の解を逐次近似して求めている方法である。まず、初期値として水平速度は(1)式のように仮定している。

$$u_0(x, y) = \frac{Q}{\eta(x) - z(x)} \quad (1)$$

ここに、 $\eta(x)$ は底面から表面までの高さで、 $z(x)$ は非均一性水路床を表している。 Q は単位幅流量である。また、ポテンシャル流において、水平速度 u と鉛直速度 v は(1)式を満足している。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\psi_n(x, y) = \int u_{n-1}(x, y) dy + y_{n-1}(x, y) \quad (4)$$

ϕ は速度ポテンシャルであり、 ψ は流れ関数。境界条件として、水面の流線あるいは $y = \eta(x)$ 時、流れ関数 $\psi(x, y) = Q$ で、 $y = z(x)$ 時、流れ関数 $\psi(x, y) = 0$ で置く。

そして、初期値 u_0 を(4)式に代入して、境界条件を用いて、流れ関数を求めることができる。ピカールにより、 $n=1, 2, 3 \dots$ と大きくすると、流れ関数の次数が一次精度、二次精度と大きくなる。その上、導出した流れ場は、 n が同じ階で非圧縮性流れの連続式に適用でき、 n が大きければ、大きいほど、非回転性流れを満足する。具体的

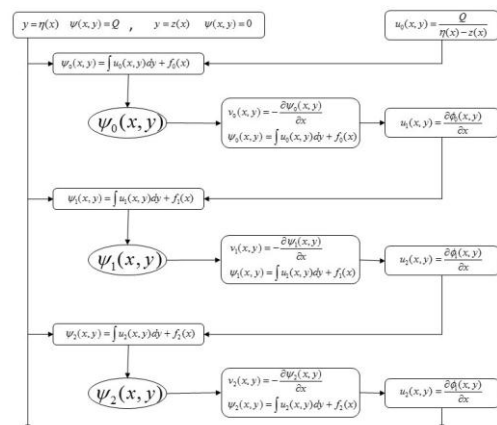


図 1 ピカールの逐次近似法流れ図

な逐次近似流れを図1に示す。

図1の中、繰り返しの一つ流れから見ると、 $v(x,y)$ の計算部分と $u(x,y)$ の計算部分はそれぞれポテンシャルより与えられるスカラー関数(式2.2)から得る式で、すなわち、ピカールの逐次近似法はポテンシャルを解いている。

3. 水面形方程式の導出

Benjaminの理論に基づいて、非静水圧を考慮して、ベルヌーイ定理を(5)式に示す。

$$R = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy + \frac{p}{\rho} \quad (5)$$

ここで、圧力は静水圧を仮定せずに、直接圧力をおいている。ピカールの逐次近似法により速度分布を(5)式に代入して、二乗までの項のみ考えると、(6)式になる。ピカールの逐次近似法により流れ関数を用いて、非静水圧を考慮した水面形方程式(7)式を導出した。

$$\begin{aligned} R = & \frac{Q^2}{2gh(x)^2} + h(x) + z(x) - \\ & \frac{Q^2 h'(x)^2}{6gh(x)^2} + \frac{Q^2 z'(x)^2}{2gh(x)^2} + \\ & \frac{Q^2 h''(x)}{3gh(x)} + \frac{Q^2 z''(x)}{2gh(x)} \\ & (1-R)h^2(x) + \\ & h(x)[z(x) + 2kh'(x) + 3kz''(x)] - \\ & kh'(x)^2 + 2kz'(x)^2 + 3k^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$(7)$$

K は流線の勾配なので、 R を(7)式に代入すると、 $h''(x)$ に関する式(8)を得る。

$$\begin{aligned} h''(x) = & \frac{1}{2h_0^2 q^2 h(x)} (6gh_0^3 - \\ & 6gh_0^2 h(x)^2 z(x) - 6gh_0^2 h(x)^3 + \\ & h_0^2 Q^2 h'(x)^2 - 3h_0^2 Q^2 h(x) z'(x) + \\ & 3Q^2 h(x)^2 - 3h_0^2 Q^2 z'(x)^2 - 3h_0^2 Q^2) \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式で $h'(x)$ と $h''(x)$ に対して数値的に解いた。本研究で、水面形方程式は4次Runge-Kutta法を用いて解く。ピカールの逐次近似法により速度分布を用いて、水圧 p を計算できる。

4. 実験の検証と解析解の比較

(1) 実験の検証

N.S.Sivakumaranらの実験で用いた開水路結果と本研究で示した(8)式の数値解により水面形の比較を行う(実験条件が付録に示す)。図2は結果で、図中の点は実験結果であり、線は本研究で提案した式で水面形の数値解であ

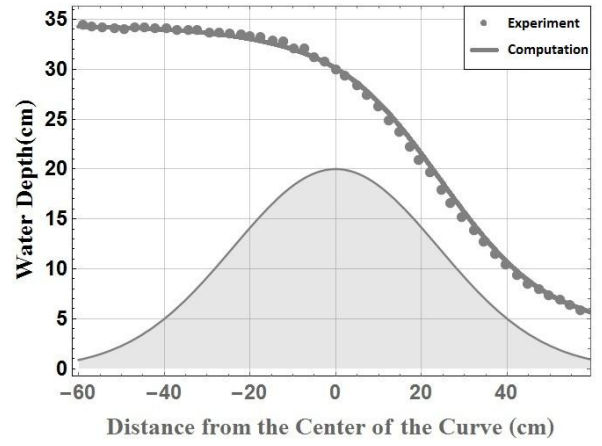


図 2 実験結果と数値解により水面形の比較

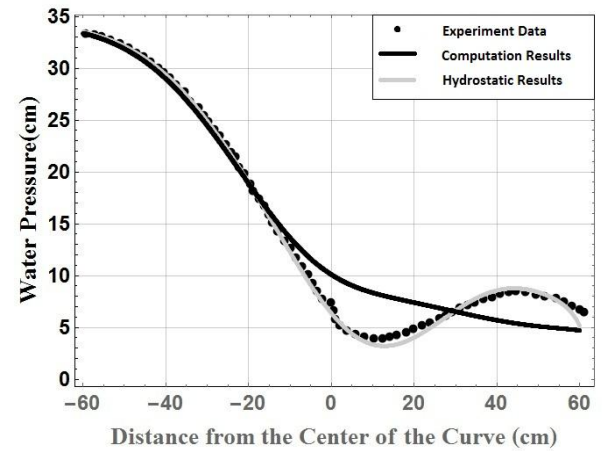


図 3 実験結果と本研究で底面圧力の数値解

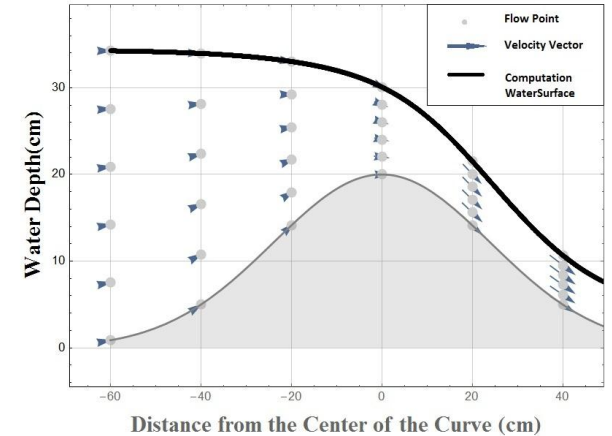


図 4 ポテンシャル流れ場の近似

る。実験結果と数値計算結果はよく合うと見える。図3に示すように、図中の点はN.S.Sivakumaranらの実験で底面の圧力水頭であり、黒い線は本研究で提案した式で底面圧力水頭の数値解であり、また灰色の線は静水圧を仮定する圧力水頭である。実験結果と本研究で提案した式で底面圧力の数値解とよく合っていると見える。また、底面における圧力は流線の形と関係があると見える。流線は上向き曲りであると、圧力が小さくなる。逆に、流

線は下向き曲がりがあると、圧力が大きくなる

図4に示すように、図中の点は流れ場の代表点である、また、図中の線は研究で提案した式の底面圧力水頭の数値解であり、矢印は代表点においてピカールの逐次漸近法によるポテンシャル流れ場の近似により速度ベクトルである。そこで、本研究で非均一な開水路床における非静水圧を考慮した水面形方程式、ピカールの逐次漸近法による非均一な開水路床におけるポテンシャル流れ場の近似する方法を提案できた。

(2) 解析解の比較

図5は、N.S.Sivakumaranらの実験条件の上で、銭らの静水圧を仮定した水面形の解析解との比較。黒い線は本研究で提案した水面形式、しかし、N.S.Sivakumaranらの実験条件から計算した解析解がないが、灰色線は実験の近似条件を用いて計算した解析解水面形。考察の結果は、静水圧と仮定した底面における水面形は本研究と合わないに見える。この実験条件で、非均一な開水路床における静水圧とは仮定できず、非静水圧を考慮しなければならないことを検証できた。

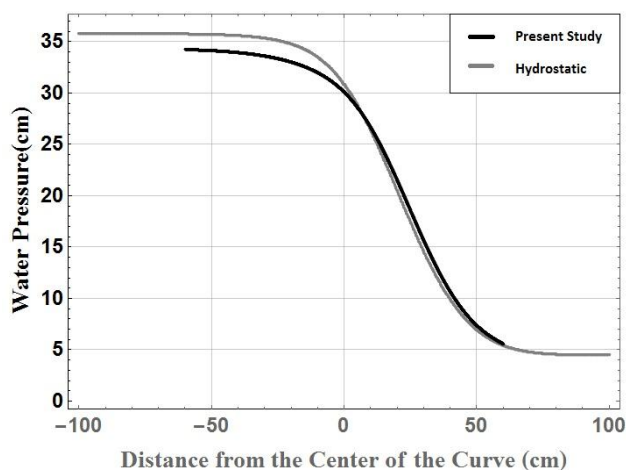


図 5 解析解との比較

5. まとめ

本研究は、非均一な開水路床における非静水圧を考慮した水面形方程式を提案した。さらに、実験で式の合理性を検証した提案した式で任意の開水路床における水面形を再現できる。ここで得られた知見を以下に示す。

1)ピカール逐次漸近法で非均一な開水路床におけるポテンシャルフローの流れ場を近似することができた。

2)非静水圧を考慮した非均一な水路床における水面形方程式を提案できた。

3)数値計算により水面形や底面における圧力を現実の流れと比較すると、両方から非均一な水路床における非静水圧を考慮した水面形は静水圧仮定の式より実験結果

の水面形をよく再現できる。

4) 静水圧を仮定した解析解と良く合わない、この原因が将来研究の重要点である。

付録

N. S. Sivakumaranらの実験の概要

N.S.Sivakumaranらは全長915cm、幅44.5cm、高さ65cmである開水路の実験設置を用いた。水路床に65cmにわたって最大高さ20cmに達するような凸部を設置した。

図6に示すように、開水路流れ実験が行った。表1を示すような実験条件及び凸部形状があった。

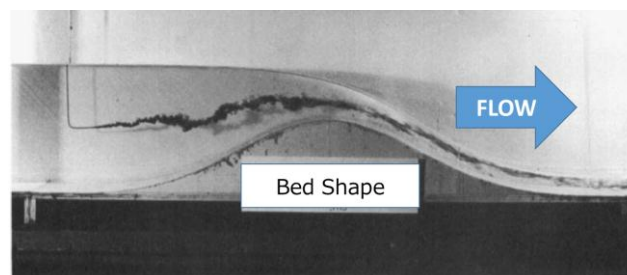


図 6 N.S.Sivakumaranらの実験で用いた開水路の模式図

表-1 N.S.Sivakumaranらの実験条件及び凸部形状.

流量(cm ² /s)	1119.7
初期水深(cm)	34.34
凸部(cm)	$z(x) = 20\exp[-0.5\left(\frac{x}{24}\right)^2](cm)$

参考文献

- 1) Benjamin T.B. and Lighthill. M.J.On cnoidal waves and bores, proc.R.Soc.Lond.A224, 448-460.1954.
- 2) N.S.SIVAKUMARAN,T.TINGSANCHALI AND R.J.HOSKING:Steady shallow flow over curved beds, J . Fluid Mech. (1983),Vol.128p, p . 469-487Shepard, F. P. and Inman, D. L. : Nearshore water circulation related to bottom topography and wave refraction, Trans. AGU., Vol.31, No.2, 1950.
- 3) 銭潮潮, 山田正:開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形形成に関する基礎的研究, 水利科学, No.336.第 58 卷.第 1 号 2014.
- 4) Fenton:Channel flow over curved boundaries and a new hydraulic theory, Asia and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Research, 26-29 August 1996.