

連続群論法による相似変換を用いた乱流境界層に関する非線型偏微分方程式の解析手法の提案

劉 佳^{1*}・山田 正²

¹中央大学大学院 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

²中央大学 (〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

* E-mail: ryuka.0215@civil.chuo-u.ac.jp

本研究では、連続群論からのアプローチによる相似変換を用い、一般的な偏微分方程式の解析解を求める手法を提案した。提案した手法で求めた解を本研究では実用解と呼ぶ。実用解を得ることで、解析解が求められない偏微分方程式に対して毎回数値解析を行う必要がなく、簡単に偏微分方程式の解が得られる。また、連続群論のアプローチによる相似変換を用い、混合距離理論とブシネクスの渦動粘性係数の仮定を用い、乱流境界層の速度分布を求め、得られた速度分布を比較した。

Key Words : *partial differential equation, similarity transformation, continuous group theory, velocity distribution, turbulent boundary layer*

1. はじめ

流体力学の世界では、偏微分方程式によって様々な現象を説明することができる。しかし、非線型偏微分方程式を厳密に解くことは困難であり、現在では、非線型を線型に変換する手法、また偏微分方程式を常微分方程式に変換する手法が一般的に使われている¹⁾。偏微分方程式を常微分方程式に変換する方法の1つに相似変換を用いる方法がある。本研究では連続群論法による相似変換を用い、非線型偏微分方程式の解析解を求める手法を提案し、非線型拡散方程式と境界層方程式を例として提案した手法を適用した。

2. 提案する手法について

本研究では、連続群論のアプローチによる相似変換を用い、非線型偏微分方程式を非線形常微分方程式に変換し、その数値解を求める手法を提案する。具体的には、求めた数値解に良く適合する関数形を探し、求めた関数形により、元の非線型偏微分方程式の解が求められる。提案した手法で求めた非線型偏微分方程式解を実用解と呼ぶ。

3. 連続群論法に基づく相似変換の手法

相似変換¹⁾は微分方程式の独立変数の個数の減少に効果がある。相似変換により、2独立変数の問題について補助条件付きの偏微分方程式から、適当な境界条件付きの常微分方程式に変換する。本研究で用いた連続群論法による相似変換は高度な知識が必要とされている手法であり、著者らの知る限り応用例があまりない。連続群論法に基づく相似変換の手法について簡単に説明する。以下に定義を示す。

定義 1 : ある連続関数の集合は $Z^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^m; a)$ であり、パラメータ a に依存する変数変換を用い、変数 z^1, z^2, \dots, z^m を変数 Z^1, Z^2, \dots, Z^m に変換できる。ここで、 $Z^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^m; a)$ を連続変換群と呼ぶ。

定義 2 : ある関数 $g(z^1, z^2, \dots, z^m)$ に対して、変換 $Z^i = f^i(z^1, z^2, \dots, z^m; a)$ を行う。

関数 g の形式が変わらなければ(つまり $g(z^1, z^2, \dots, z^m) = g(Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$ を満たすならば)、関数 g は変換 Z^i に対して不変である。

定義 3 : ある微分方程式(式(1))に対して、式(2-1)、式(2-2)に示す変換を行い、微分方程式の形式が変わ

らなければ(つまり以下の式(3)を満たすならば)微分方程式 $\phi_j = 0$ は, 変換 X^i, U^i に対して不変である.

$$\phi_j \left(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n, \frac{\partial^k u^1}{\partial (x^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k u^n}{\partial (x^m)^k} \right) = 0 \quad (1)$$

$$X^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^m; a) \quad (X^i, x^i \text{ は独立変数}) \quad (2-1)$$

$$U^j = h^j(u^1, u^2, \dots, u^n; a) \quad (U^j, u^j \text{ は従属変数}) \quad (2-2)$$

$$\phi_j \left(X^1, \dots, X^m, U^1, \dots, U^n, \frac{\partial^k U^1}{\partial (X^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k U^n}{\partial (X^m)^k} \right) = 0 \quad (3)$$

以上の定義より, ある微分方程式式(1)は変換式(2-1), 式(2-2)に対して不変であれば, その微分方程式式(1) $\phi_j = 0$ の解は以下の新しい微分方程式式(4)の解で表せる. $\Phi_j = 0$ の独立変数は $\phi_j = 0$ より

1つ減り, η^i, F^j は式(5)を満たす.

$$\Phi_j \left(\eta^1, \dots, \eta^{m-1}, F^1, \dots, F^n, \frac{\partial^k F^1}{\partial (\eta^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k F^n}{\partial (\eta^{m-1})^k} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\eta^i = \eta^i(x^1, x^2, \dots, x^m) \quad (5)$$

$$F^j(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{m-1}) = g^j(x^1, x^2, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n)$$

関数 η^i, F^j は変換 X^i, U^j に対して不変である.

3. 堤防浸潤面を表す非線型拡散方程式

非線型拡散方程式式(6)は一般的に堤防内の浸透面を表す. ただし k は透水係数である.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (6)$$

(1) 非線型拡散方程式の相似変換

非線型拡散方程式式(6)を定義1により, 各変数を式(7)のように変換すると, 式(8)が得られる. 連続群論法による相似変換を使うためには, 式(9)を満たす必要がある. 式(9)の関係が成り立てば, 式(6)は変換式(7)に対して不変である.

$$\tilde{x} = a^\alpha x \quad \tilde{t} = a^\beta t \quad \tilde{h} = a^\gamma h \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} - a^{2\alpha-\gamma-\beta} k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{h} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right) = 0 \quad (8)$$

$$2\alpha - \beta - \gamma = 0 \quad (9)$$

そして, 定義3により, 式(10)が成立する. 変換式(7)を用い, η, F は式(11)と式(12)を満たす.

$$\phi \left(x, t, h, \frac{\partial^k h}{\partial (x)^k}, \dots, \frac{\partial^k h}{\partial (t)^k} \right) = \Phi \left(\eta, F, \frac{\partial F}{\partial (\eta)}, \dots, \frac{\partial^k F}{\partial (\eta)^k} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\eta(x, t) = \eta(\tilde{x}, \tilde{t}) = x t^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (11)$$

$$F(\eta) = g(t, h) = g(\tilde{t}, \tilde{h}) = h t^{\frac{\gamma}{\beta}} \quad (12)$$

η, F を非線型拡散方程式式(6)に代入すると, 非線型常微分方程式式(13)に変換した.

$$\frac{\gamma}{\beta} F(\eta) - \frac{\alpha}{\beta} \eta F(\eta)' = k F(\eta) F(\eta)'' \quad (13)$$

拡散方程式に関する相似変換として直感的に求められた Boltzmann 変換がある. 本研究で用いた連続群論法による相似変換は, 現象の物理性また経験を考える必要がなく, 自動的に偏微分方程式の相似変換を導くことができる.

(2) 堤防浸潤面に関する非線型拡散方程式の実用解

堤防内の浸潤面に関する初期条件と境界条件式(14)を用い, 非線型常微分方程式式(13)のパラメータ α, β, γ と式(13)の境界条件も決まる. 式(15)は非線型拡散方程式式(6)を相似変換した後の非線型常微分方程式である.

$$h(x, 0) = 0 \quad h(0, t) = 1 \quad h(\infty, t) = 0 \quad (14)$$

$$F(0) = 1 \quad F(\infty) = 0 \quad (15)$$

$$F(\eta)'' = -\frac{\eta}{2kF(\eta)} F(\eta)' \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$$

ここで, k を消去するため, $\eta = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$ とおき,

$$F(\eta)'' = -\frac{2\eta}{F(\eta)} \frac{dF(\eta)}{d\eta} \quad (16)$$

次に式(15)の条件を用い, 式(16)に数値解析を行い, 数値解を求めた. そして, 求めた数値解によく適合する関数形を探した. 式(17)に示す. 求めた $F(\eta)$ の関数形から相似変換により式(18)を求めることで, 堤防内の浸潤面を表す実用解が得られる.

$$F(\eta) = \text{Exp} \left[-0.86 \frac{\eta}{\sqrt{0.81 - \eta}} \right] \quad (17)$$

$$h(x, t) = h_0 \text{Exp} \left[-0.86 \frac{\eta}{\sqrt{0.81 - \eta}} \right] \quad (18)$$

(3) 計算結果

計算条件は, 水深 $h_0 = 10\text{m}$, 浸透時間 $t = 96\text{h}$, 透水係数 $k = 0.001\text{cm/s}$, 堤防内の浸潤面に関する非線型拡散方程式の実用解と数値解を比較した結果を図-1に示す.

4. 乱流境界層方程式の速度分布

従来の流体力学の教科書²⁾では層流境界層において境界層厚の変化を仮定するプラントルの境界層方程式とブラジウスによるアプローチは書かれている。しかし、乱流境界層においては、速度分布を仮定するカルマンの運動方程式によるアプローチの記載がある。乱流に応用したプラントル-ブラジウス型のアプローチは書かれていない。本研究では連続群論法による相似変換を用い、乱流境界層の風速分布を導いた。

(1) 乱流境界層方程式の相似変換

プラントルが提案した境界層方程式から基本式を導いた。以下の式(19)、式(20)に示す。 u と v は x 軸と y 軸の流速、 U_∞ は定常な主流流速、 ε は渦動粘性係数である。渦動粘性係数 ε には様々なモデルがあるため、ここでは、プラントルの混合距離理論式(21)とブシネスクの渦動粘性係数式(22)を用い、式(20)に代入し、連続群論法による相似変換を行い、元の非線型偏微分方程式(20)を非線型常微分方程式(23)と式(24)に変換した。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (20)$$

$$\varepsilon = \kappa^2 y^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (21) \quad \varepsilon = k l U \quad (22)$$

$$-ff'' = 2\kappa^2 \left[\eta (f'')^2 + \eta^2 f' f''' \right] \quad (23)$$

$$-ff'' = k \left[ff'' + \eta \frac{d(ff'')}{d\eta} \right] \quad (24)$$

$$\eta = \frac{y}{x} \quad f(\eta) = \frac{v}{x}$$

(2) 得られた乱流境界層の速度分布の比較

得られた式(23)と式(24)に数値計算を行う。計算の境界条件は以下の式(25)に示すとおりであり、計算結果を図-2に示す。得られた乱流境界層の風速分布を見ると、対数分布に似た分布をしている。実際に $\log u$ と η の関係図-3を見ると、混合距離理論による求めた風速分布は実に対数分布になっている。

$$\eta = 0.01: f' = 0 \quad f = 0 \quad \kappa = 0.4 \quad (25) \\ \eta = 5 : f' = 1$$

5. まとめ

本研究では、連続群論法による非線型偏微分方程式の相似変換を導く手法を用い、また、ブシネスクの渦動粘性係数と混合距離理論の仮定を用い、乱流境界層の風速分布を求めた。

1)本研究で用いた相似変換は現象の物理性を考え

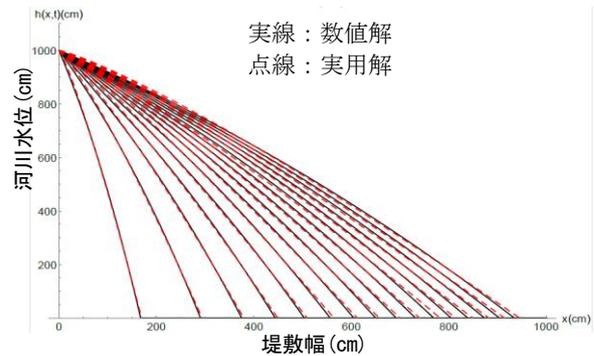


図-1 堤防の浸潤面問題に用いる非線型拡散方程式の実用解と数値解の比較

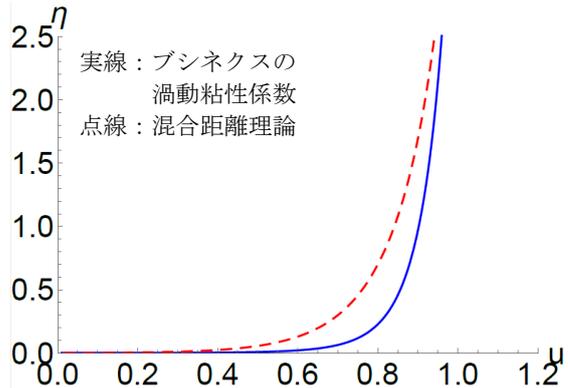


図-2 ブシネスクの渦動粘性係数と混合距離理論を用いる乱流境界層の風速分布の比較

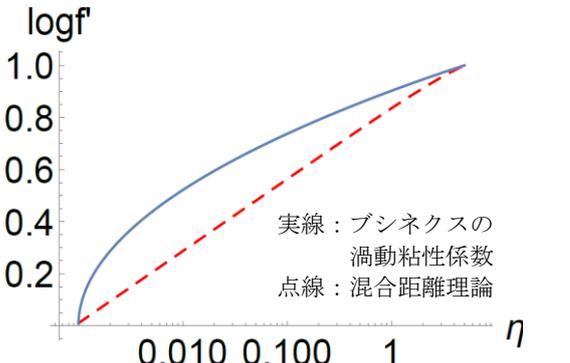


図-3 ブシネスクの渦動粘性係数と混合距離理論を用いる乱流境界層の風速対数分布の比較

る必要がなく、自動的に求められる。しかし、相似変換のパラメータは境界条件から決める必要がある。そのため、様々な現象に応用できると考える。

2) 用いた仮定によって、風速分布が対数分布になっていないものもあることがわかった。

今後、乱流境界層の風速分布の実用解とその応用性を検討していきたいと考えている。

参考文献

- 1) Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol.1, Academic Press Inc., New York(1965).
- 2) 日野幹雄, 流体力学, 朝倉書店(1999).
- 3) Ames, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol.1, Academic Press Inc., New York(1965).
- 4) Morgan, A. J. A., "Reduction by One of the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations", Quar. Appl. Math., Vol. 3, pp.250-259(1952).