

確率過程論を導入した降雨流出計算の パラメータ同定に関する研究

成 岱蔚¹・山田 正²

¹学生会員 中央大学大学院理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

E-mail: wangcw@civil.chuo-u.ac.jp

²フェロー会員 中央大学教授 理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

E-mail: yamada@civil.chuo-u.ac.jp

降雨流出過程は水文学の中に最も重要な課題である。しかし実際の流域スケールは非常に大きいので、通常第一原理の物理法則を直接に使うことができなく、モデル化をする必要がある。それによって、流域の情報が失い、解析結果と実現象の差が生じる。更に、自然現象における本質的に不確実性があるため、決定論的に降雨流出過程を解析することは限界があることが知られている。それに対して、吉見、山田¹⁾は伊藤の確率微分方程式理論を降雨流出過程に導入し、降雨の不確実性が流出与える影響を解明したが、この理論は現実問題に対して適用性はまた検証されていない。本研究は吉見、山田¹⁾らの理論を現実問題に適用手法の提案をを目標とする。特に、不確実性を表すパラメータの同定手法を提案した。

Key Words : flood risk, reliability evaluation, the theory of stochastic process, uncertainty, levee destruction

1. はじめに

水文学で扱う現象は、通常スケールが非常に大きいシステムなので、第一原理の物理法則を直接に使うことができなく、モデル化をする必要がある。それによって、流域の情報が失い、解析結果と実現象の差が生じる。更に、モデルを使わず直接に流域スケールで第一原理の物理法則を使うことは、計算コスト上可能だとしても、観測の限界があるため、その計算と相応しい初期条件を提供できない。

それに対して、データ同化、確率過程論¹⁾などの手法を水文学に応用する研究が近年増えてきた。それらの手法の共通点は：モデルと観測データは実現象の近似に過ぎないことを承認し、実現象との差を確率変数として扱い、システムの時間発展を議論することである。その内に、吉見、山田¹⁾は伊藤の確率微分方程式理論を降雨流出過程に導入し、降雨の不確実性が流出与える影響を解明したが、この理論は現実問題に対して適用性はまた検証されていない。

以上を踏まえ、本研究では、データ同化の考え方をを用いて、吉見、山田¹⁾らの理論を現実問題に適用手法の提案をを目標とする。特に、不確実性を表すパラメータの同定手法を提案した。

2. 伊藤の確率微分方程式

確率微分方程式の研究は、1905年にEinsteinが分子の不規則な衝動に起因する微粒子のBrown運動に関する研究から始まる。その後、1908年にLangevinがBrown運動を記述する確率微分方程式、Langevin方程式を提案した。また、1910年代には、Fokker, Planckによって、Langevin方程式²⁾から確率密度関数の時間発展に関する偏微分方程式（Fokker-Planck方程式）が導かれている。

一方で1940年代、伊藤清³⁾は確率解析学を創始し、確率方程式の数学的な基礎を付けた。また、彼は確率常方程式の一般的な記述する形式、現在伊藤の確率微分方程式と呼ばれる形式を提案し、それとLangevin方程式及びFokker-Planck方程式は数学上同等であることを証明した。

現在物理学、工学、経済学の各分野において、不確実性を考慮するシステムの解析には、伊藤の確率微分方程式が広く応用されている。

(1) 伊藤の確率微分方程式

常微分方程式で決定論的に記述できるシステムがランダム的な外力の作用を受ける時に、その時間発展は以下の伊藤の確率方程式で表現できる。

$$d\vec{X} = \vec{F}(\vec{X}, t)dt + \vec{\sigma}(\vec{X}, t)d\vec{W} \quad (1)$$

ここに、 $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ はシステムの状態ベクトルである。 $\vec{F}(\vec{X}, t)$ はシステムの時間発展を支配する決定論の部分である。 $\vec{\sigma}(\vec{X}, t)$ は外力の共分散行列である。状態ベクトルの各成分に作用するランダム外力はお互いに不相關な場合は $\vec{\sigma}(\vec{X}, t)$ は対角行列である。 $\vec{W}(t)$ は n 次元の Wiener 過程である。微小時間 dt の間に n 次元の Wiener 過程に従う時系列 $\vec{W}(t)$ の変化量 $d\vec{W}$ は、平均が 0、共分散行列が対角行列 $diag(\sqrt{dt}, \sqrt{dt}, \dots, \sqrt{dt})$ の n 次元ガウス分布に従う。 $\vec{\sigma}(\vec{X}, t)d\vec{W}$ はシステムに作用するランダム外力を表現する。

(2) Fokker-Planck 方程式

式(1)のような伊藤の確率方程式に対して、状態ベクトル $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の存在確率密度関数 $p(\vec{X}, t)$ の時間発展を支配する Fokker-Planck 方程式が存在する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\vec{X}, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(\vec{X}, t) p(\vec{X}, t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij}(\vec{X}, t) p(\vec{X}, t)) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $f_i(\vec{X}, t)$ は $\vec{F}(\vec{X}, t)$ の成分であり、 σ_{ij} は共分散行列 $\vec{\sigma}(\vec{X}, t)$ の成分である。 D_{ij} は拡散係数行列であり、 D_{ij} と σ_{ij} の関係は以下の式で表す：

$$D_{ij}(\vec{X}, t) = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(\vec{X}, t) \sigma_{kj}(\vec{X}, t) \quad (3)$$

式(2)を解くことにより、システムが時刻 t に状態 $\vec{X}$ にいる確率が分かる。

3. 確率過程論の流出解析への導入

本章では、降雨流出計算の基礎式と伊藤の確率微分方程式の関係を示す、それと対応する Fokker-Planck 方程式を導く。

(1) 降雨流出計算の基礎式

山田³⁾は、単一斜面に対して幅広矩形断面を想定し、連続式と運動則を基礎式として、(4)式に示す貯留型の降雨流出計算手法を示している。

$$\frac{dq}{dt} = a_0 q^\beta (r(t) - q) \quad (4)$$

である。ここに、 a_0 、 β は流域特性を表すパラメータである。

(4)式は洪水の再現性が高い木村の貯留関数法⁴⁾とは同型であり、現実流域への適用性はよく検証された⁴⁾。以下は例として、(4)式を草木ダム流域に適用し、その効果を検討する。

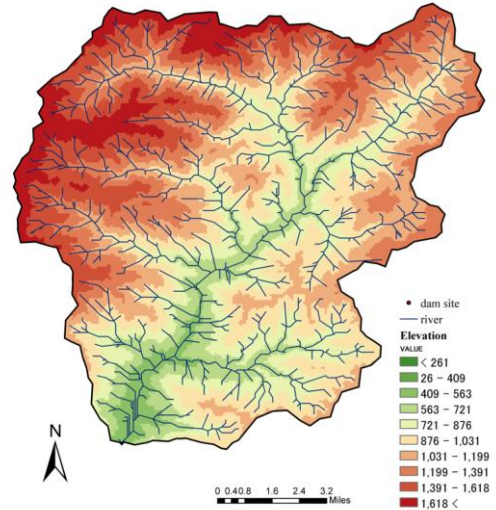


図-1 草木ダム流域の概要図

草木ダムは利根川水系渡良瀬川の本川上流部に建設されたダムである。ダムが支配している流域面積は約 254km²であり、流域の概要は図-2 に示している。

計算のパラメータ a_0 、 β はそれぞれ物理意味を持っているので、流域の物理性質から決まる。草木ダム流域の場合は $a_0 = 0.047$ 、 $\beta = 0.4$ を用いられている。

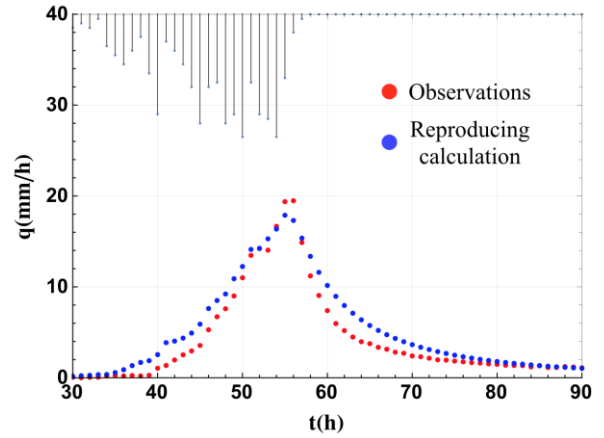


図-2 山田モデルを用いた草木ダム流域の降雨流出再現計算

図-2 は山田モデルを用いた、1982 年 7 月 31 日草木ダム流域の降雨イベントの再現計算結果を示している。図-2 に示すように、ピークの部分は計算値と観測値がよく合うが、増水時と退水時は計算値のほうが大きい傾向が見える。

山田モデルは、鉛直方向の浸透を考慮し、多層的な構造を持つモデルまで拡張し、より精度のいい再現計算ができるが、本研究では簡単のために、(4)式の一層構造のモデルを使う。

(2) 降雨流出計算の基礎式と確率微分方程式の関係

(4)式は、流出高 q に関する一階の常微分方程式であり、差分形式で表現すると以下ようになる。

$$dq = a_0 q^\beta (r(t) - q) dt \quad (5)$$

ここで、入力降雨強度 $r(t)$ が、各時刻において、ある平均値とその平均値周りにホワイトノイズとして微小な乱れ成分 $r'(t)$ が分布していると仮定して、

$$r(t) = \bar{r}(t) + r'(t) \quad (6)$$

で与えられるとすると、(5)式は以下のようにになる。

$$dq = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) - q)dt + r' a_0 q^\beta dt \quad (7)$$

ここで、(7)式を確率微分方程式の形に読み替えれば、以下に示す流出高に関する確率微分方程式を得る。

$$dq = a_0 q^\beta (\bar{r}(t) - q)dt + a_0 q^\beta \sigma \sqrt{T_L} dw \quad (8)$$

ここに、右辺第一項が決定論的な項、右辺第二項が確率論的な項を表しており、 dw はWiener過程に従う時系列 $w(t)$ の微小時間変化量規分布 $N(0, dt)$ に従う。

(8)式は形式上と伊藤の確率微分方程式が同様であり、対応するFokker-Planck方程式は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(q, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial a_0 q^\beta (\bar{r} - q) p(q, t)}{\partial q} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (a_0 q^\beta \sigma \sqrt{T_L})^2 p(q, t)}{\partial q^2} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)は流出高 q の確率密度関数の時間発展の支配方程式である. ある時刻の q の確率密度関数を与えれば, その後の確率密度関数が計算できる.

4. データ同化の考え方をういて降雨流出過程における不確実性を同定する

前章では、降雨の不確実性を考慮した降雨流出過程の支配方程式を導出したが、現実問題に適用する時に、システム不確実性を表すパラメータ σ はどのように同定するかはまた明らかにしていない。

本章では，データ同化の考え方を基づいて， σ の同定手法を提案する．

(1) データ同化の基本概念

データ同化は不確実性のあるシステムを予報する手法であり、近年気象分野でよく使われている。代表的なデータ同化手法はフィルタリング理論と4次元変分法がある。データ同化の基本的な考え方は以下の図-3に示す。

データ同化はシステムの時間発展を状態空間の中の点の運動と見直す. 状態空間の中の点は状態ベクトル $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表現する. 点の運動は微分方程式に支

配される.

決定論的な予報手法では、ある時刻の状態空間の点の位置を与えれば、そのあと点の運動軌跡が計算できるが、データ同化の基本概念は、ある時刻のシステムの状態は不確実性があるため、状態空間の一点に定まることが出来ない。その代わりにある時刻のシステムの状態は状態空間上の確率密度関数で記述する必要がある。

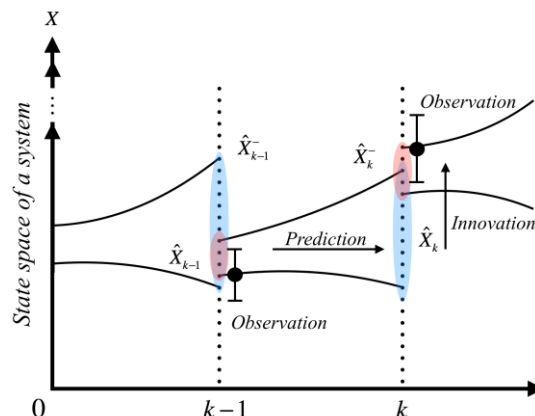


図-3 データ同化の概念図

通常データ同化は2つステップがある。ステップ1は予測である。時刻 $k-1$ のシステムの状態の確率密度関数を用いて、時刻 k の状態の確率密度関数を予測する。この予測結果は事前確率密度だと呼ぶ。ステップ2はイノベーションである。時刻 k の事前確率密度と観測値を用いて、時刻 k の事後確率密度関数を計算する。この事後確率密度関数は k 時刻の観測情報を考慮した、 k 時刻の最終的な予測である。

ステップ1の予測手法の違いによって、様々な同化の手法が提案されている．本研究は式(9)のFokker-Planck方程式を用いられる．さらに，事前確率密度関数と観測値の関係から，拡散係数 σ を同定することができる．

(2) 拡散係数 σ を同定する方法

前節に述べたように、 $k-1$ 時刻の確率密度関数を与えれば、式(9)のFokker-Planck方程式を用いて k 時刻の確率密度関数を計算できる。ここでは、簡単のため、観測値が真値だとする。それで、 $k-1$ 時刻の確率密度関数は観測値を中心点とするディラックのデルタ関数になる。

第3章が議論した草木ダム流域をもう一度例とする。流出高 q に関して、1時間ごとに観測データ1つがある。 $k-1$ 時刻の観測値が q_{k-1}^{obs} だとすると、 $k-1$ 時刻の q の確率密度関数は $\delta(q - q_{k-1}^{obs})$ である。

計算を用いた雨量データは1時間平均データである，それは観測の時間間隔と一致する． $\delta(q - q_{k-1}^{obs})$ を初期条件として，式(9)を解くと，1時間後の q の確率密度関数が得られる．その解は近似的に平均 q_k ，標準偏差 $a_0 q_{k-1}^{obs} \sigma \sqrt{T_L}$ の正規分布になる． q_k は決定論的な解の k

時刻の q である。

これで、 k 時刻の観測値は確率密度関数 $N(q_k, a_0 q_{k-1}^{obs} \sigma \sqrt{T_L})$ のサンプルだとして見直せる。つまり、任意時刻 k に対して、統計量 $(q_k^{obs} - q_k)/a_0 q_{k-1}^{obs}$ は正規分布 $N(0, \sigma \sqrt{T_L})$ に従うべきである。この関係を用いて、 σ を同定することができる。

草木ダム流域の1978年から2013年までの22回大きい降雨イベントのデータを用いて、 σ を同定した結果は以下の図-4に示している。

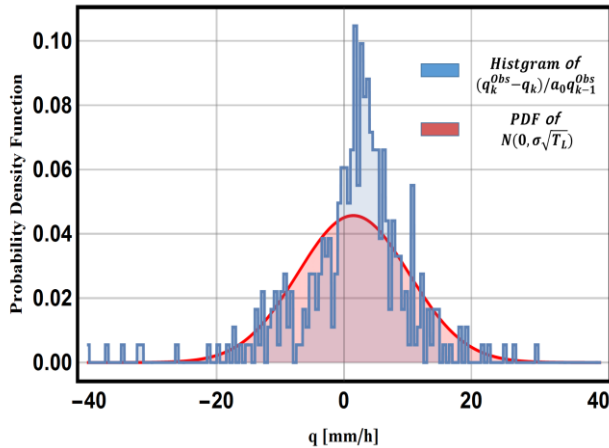


図-4 σ の同定結果

$\sigma \sqrt{T_L}$ の値は $8.73 \text{ mm}/\sqrt{h}$ になっている。図から見ると、 $(q_k^{obs} - q_k)/a_0 q_{k-1}^{obs}$ の分布は基本的に正規分布であるが、中心の部分は $(q_k^{obs} - q_k)/a_0 q_{k-1}^{obs}$ の方がよく集めている。その原因は3つがある。1つ目は、本研究は1時間の時間間隔に近似的に式(9)を定常拡散過程として扱い、得られた解を用いられているため、誤差が生じる。2つ目は $\sigma \sqrt{T_L}$ を定数として扱っているが、実際 $\sigma \sqrt{T_L}$ は定数でなく、降雨強度と関係する量であるから、誤差

が生じる。3つ目は式(9)は降雨流出過程の不確実性はすべて降雨の不確実性から生じるを前提条件とする導いた式である。それ以外の不確実性が著しく影響がある場合は適用できない。

5. まとめ

本研究は吉見、山田らが提案する確率過程論を導入した降雨流出過程の解析手法を現実問題に適用し（草木ダム流域を例とする）、不確実性を表すパラメータ $\sigma \sqrt{T_L}$ の同定手法を提案した。

同定した結果は、統計量の分布と理論的に導いた分布と違いがあることが分かった。その原因については第4章で詳しく分析した。

今後の展開はまず第4章に述べた誤差が生じる原因を直す方法を検討する。なお、(7)式と(8)式の関係から、雨の分散から直接にFokker-Planck方程式の拡散係数 σ を得ることが可能であることが分かる。そのように出した拡散係数 σ と本研究提案した手法で同定した σ を比較し、本研究が提案する手法の信頼性を検証する。

参考文献

- 1) 吉見和紘, 山田正, 山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集B1(水工学), Vol.71, No.4, 259-264, 2015.
- 2) 伊藤清: 確率論【現代数学(14)】, 岩波書店, 1953.
- 3) 山田正: 山地流出の非線形性に関する研究, 水工学論文集, 第47巻, pp.259-264, 2003.
- 4) 木村俊晃: 貯留関数法による洪水追跡流出法, 建設省土木研究所, 1961.

(2016.7.5 受付)

A STUDY ON THE PARAMETER ESTIMATION OF THE RAINFALL-RUNOFF SIMULATION BASED ON THE THEORY OF STOCHASTIC PROCESS

Daiwei CHENG, Tadashi YAMADA

Rainfall-runoff process is the central issue of hydrology. However, because of the scale of watershed, it is almost impossible to apply first principles of physics directly to simulate the rainfall-runoff process. Thus, many models had been suggested and some of them had achieved a very high accuracy and been widely used in runoff forecast and flood control. Unfortunately, all of these deterministic rainfall-runoff models have their limits. Thus stochastic method had been suggested.

Recently, K. Yoshimi and T. Yamada have tried to use Fokker-Planck equation to study the uncertainty of stream flow due to the random fluctuation in precipitation. The present study is based on K. Yoshimi and T. Yamada's theory and try to apply it into practical problems. Especially, the present study suggested a way to estimate the parameter which represented the uncertainty of the rainfall-runoff process.