

60. 非静水圧を考慮した定在波を伴う 開水路水面形方程式に関する研究

楊 麗¹・成 岱蔚¹・銭 潮潮²・山田 正²

¹中央大学理工学研究科都市環境学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

²中央大学理工学部都市環境学科（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

E-mail: yangli@civil.chuo-u.ac.jp

開水路流れには射流から常流の遷移時に現れる跳水があり、いずれの手法は従来の静水圧分布の仮定のもとに構築されているが、実際の河川では、多くの場合が非静水圧の流れ場であるため、開水路不等流は非静水圧を考慮しなければならない。そこで、銭・山田は流線の曲率及び河床の曲率による非静水圧の効果を考慮し、定在波を表現できる三階微分の不等流の基礎式を導出した。基礎式の解析解を求められていないため、本稿では多重スケール法により特異摂動法で非線形解析を行い、基礎方程式の定在波を解析した。

Key Words : open channel flow, hydrostatic jump, undular jump, non-linear analysis

1. はじめに

開水路流れには射流から常流の遷移時に現れる跳水がある。流入フルード数によって、波状跳水、弱跳水、動揺跳水、定常跳水および強跳水に分類されている。波状跳水の水面形に対しては多くの研究がなされている。例えば、Iwasa¹⁾は鉛直加速度を考慮した開水路の基礎式から孤立波・クノイド波解を誘導し、それらを一波目山頂部で連結することによって波状跳水の水面形を表せるものとした。また、Andersen²⁾は Boussinesq のエネルギー方程式から波状跳水の水面形を解析することを試みた。

一般的に水平スケールに比べて鉛直スケールが非常に小さい開水路において、流線の曲率が無視できる。あるいは水路勾配が急でない場合、流れの鉛直方向加速度を無視することができる。したがって圧力分布を静水圧分布とみなせる。しかしながら、開水路には波状跳水といった定在波を伴う流れの非静水圧効果を無視できない現象が存在している。水路床や水路断面形状の変化により波状跳水と呼ばれる水面が滑らかに上昇する接続部を持ち、接続部より下流側には定在波列が存在する特徴をもつ水面が発生する。銭³⁾は非静水圧を考慮して、波と流れが共存する開水路不等流の水面形基礎式を導出し、基礎式の数値計算をしたが、まだ基礎式の解析解を求めているため、摂動法を用いて、非線形微分方程式である基礎式を解いた。

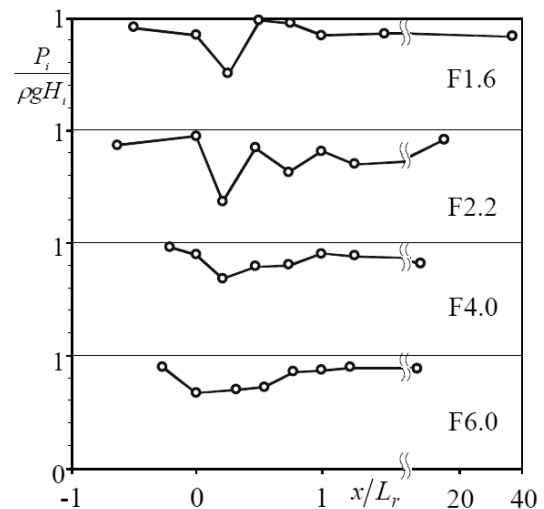


図-1 時間平均圧力 P_t を $\rho g H_t$ で無次元化した値の流下方変化

2. 非静水圧を考慮した定在波を伴う開水路水面形基本式概要

波状跳水のような波状の水面を有する流れにおいては、圧力の非静水圧を考慮しなければならない²⁾。例えば、図-1⁴⁾に時間平均圧力 P_t を $\rho g H_t$ で除した値の流下方向変化を示す。跳水における $P_t / \rho g H_t$ の値が1よりも若干小さい値を示しており、時間平均圧力は静水圧よりも小さいことがわかる。波状跳水が発生する時、静水圧の仮定が崩

れ、非静水压を考慮すべきである。

ここで、図-2 には、定在波を伴う流れ場の模式図である。H は水位、h は水深、Z は水面からとった任意の水深、z は基準から上向きにとった座標、k は拡散係数、U は断面平均速度である。

(1) 運動量の保存則

図-2 における、破線で囲まれた区間の運動量を考える。外力が働き、コントロールボリュームに作用する外力は速度方向の重力、非静水压、せん断応力である。運動量の輸送は移流によるもの ($\rho h U^2$) 以外、乱流拡散による輸送効果もある。そして微小区間のコントロールボリュームを挟む二つの断面間の運動量の変化量は式(1a)で示す。

$$\frac{d(\rho g U^2) + d(\rho k \frac{dh}{dx})}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \tau_w - \rho g h \frac{dz}{dx} \quad (1a)$$

(2) 非静水压 $p(x)$

本研究で扱う流れ場においては定在波による水面からの曲率と河床の非一様性による流線の曲率の二つの効果がある。流線の曲率半径 ($1/r$) と水路により曲率半径 ($1/r_b$) はそれぞれ(1b)、(1c)式で示される。

$$\frac{1}{r} = \frac{h-Z}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (1b)$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{Z}{h} \frac{d^2 z}{dx^2} \quad (1c)$$

よって任意地点における圧力差は

$$dp(Z) = \rho g \left[1 + \frac{U^2}{g} \left(\frac{h-Z}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{Z}{h} \frac{d^2 z}{dx^2} \right) \right] \quad (1d)$$

圧力分布は圧力差 $dp(Z)$ を水深 h で積分することにより得られ、

$$p(x) = \int_0^h \int \rho g \left[1 + \frac{U^2}{g} \left(\frac{h-Z}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{Z}{h} \frac{d^2 z}{dx^2} \right) \right] dZ \quad (1e)$$

$$= \frac{1}{2} \rho g h^2 + \rho \frac{q^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho \frac{q^2}{6} \frac{d^2 z}{dx^2}$$

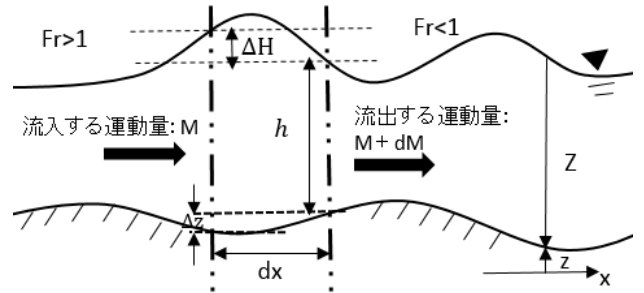


図-2 定在波を伴う流れ場

(1e)式の右辺第一項は静水压を表し、右辺第二項は水面定在波の曲率による非静水压からの寄与、第三項は非一様水路床の曲率による非静水压分布からの寄与を表す。

(3) 基礎式を導出

(1e)式を(1a)式に代入して整理すると水面形方程式(1f)を得る。

$$\frac{d^3 h}{dx^3} + k \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{3}{q^2} (gh - \frac{q^2}{h^2}) \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^3 z}{dx^3} = -\frac{3}{q^2} (\frac{\tau_w}{\rho} + gh \frac{dz}{dx}) \quad (1f)$$

(4) 無次元化

上流水深 h_0 , $\eta = h/h_0$, $\xi = x/h_0$, $\zeta = z/h_0$, $q = u_0 h_0$
 $Fr = u_0 / (gh_0)^{1/2}$, を用いて(1f)式を無次元化すると、無次元した水面形方程式(1g)式を得る。

$$Fr^2 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + K \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{2} Fr^2 \frac{d^3 \zeta}{d\xi^3} + 3(\eta - \frac{Fr^2}{\eta^2}) \frac{d\eta}{d\xi} = -3f_0 - 3\eta \frac{d\zeta}{d\xi} \quad (1g)$$

ここに、 $f_0 = \tau_w h_0^2 / \rho q^2$ は無次元化したせん断応力を表し、摩擦抵抗係数である。K は無次元した拡散係数である。

3. 非線形解析

(1) 非線形解析の概要

導出した非静水压を考慮した定在波を伴う不等流の水面形方程式は非線形微分方程式である。このような微分方程式はまだ厳密解を求めることができない。摂動法は解析的に厳密解を得ることができない微分方程式の高精度の近似解を得る一般的方法として知られている⁶⁾から、本稿では摂動法で微分方程式の近似を行った。しかし、摂動法を試みると、X 伴う、 η が無限に増加する永年項

の出現という形の破綻が生ずることが明らかになる。本稿では、永年項問題を解決するため、通常の摂動法を適用することもできない微分方程式に関して、高精度の近似解を得る体系的な方法である、特異摂動法により、基礎式を解く。

(2) 特異摂動法で解析

永年項が出現するタイプの特異摂動問題を解決するため、独立変数の中に複数のスケールを導入する複スケール解決手法を用いる。

普遍的な不等流の解析対象となり得る不等流水面形の存在範囲を図-3で示す。図-3から見ると、領域③④では波状跳水が発生する。そして、フルード数 Fr が1の近くに跳水が発生することも知られる。フルード数 $Fr=1$ の時、水深 (h) は限界水深に等しい、一方 Withman⁷⁾ によると拡散係数 $K=a(Fr_{upperend}-1)$ であるので、 $K \approx 0$ となる。そして、拡散項 $K d^2 \eta / d \xi^2$ は省略できる、(1g)式は(2a)になる。

$$Fr^2 \frac{d^3 \eta}{d \xi^3} + \frac{1}{2} Fr^2 \frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} + 3\left(\eta - \frac{Fr^2}{\eta^2}\right) \frac{d \eta}{d \xi} = -3f_0 - 3\eta \frac{d \zeta}{d \xi} \quad (2a)$$

本稿ではフルード数1付近での非静水圧を考慮した波状跳水の水面形を研究行うため、フルード数に関する摂動核 ε を導入して、 $Fr=1+\varepsilon$ を得る。また、振幅や波長緩やかに変化している波状跳水を考慮しているので、周期的な解を得るべきである。従って、緩やかな変化は、普通のスケールで解析せずに、複スケールを用いる。 X 、 X_1 はそれぞれ本来のスケールと緩やかな変化を表現するスケールである。 $\xi(X)$ は $\xi(X, X_1)$ に変わる。 $X_1 = \varepsilon X$ である。そして、方程式の解は(2b)で示す。

$$\eta = \eta_0(X, X_1) + \varepsilon \eta_1(X_1) \quad (2b)$$

ここで、 η_1 は X のスケールと関係なく、 X_1 のスケールで表現される。

$Fr=1+\varepsilon$ と $\xi(X, X_1)$ は(2a)式に代入すると、 ε に関する0次オーダーは(2c)で表して、1次オーダーは(2d)で表す。(2a)式の右辺の項 $-3\eta d\zeta/d\xi$ は開水路河床の形状を表すため、緩やかな変化を表現するスケール X_1 に関する変化は考慮しなくても構わない。

$$\frac{d^3 \eta}{d X^3} + 3\eta \frac{d \eta}{d X} - \frac{3}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial X} = -3(f_0 + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial X}) \quad (2c)$$

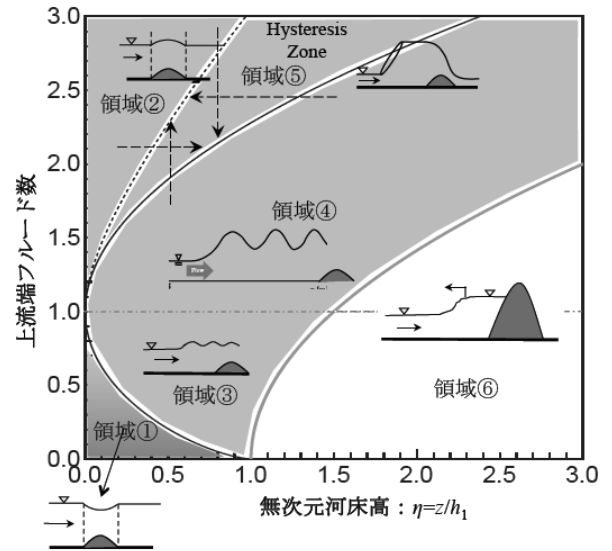


図-3 普遍的な不等流の解析対象となり得る不等流水面形の存在範囲

$$\frac{\partial \eta}{\partial X_1} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial X_1} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial X_1} = 0 \quad (2d)$$

ここで、(2d)に対して積分すると、(2e)式を得る。

$$\frac{1}{2} \eta^2 + \eta + \frac{1}{\eta} = C \quad (2e)$$

(2e)式の両辺を η をかけて、(2f)式になる。

$$\frac{1}{2} \eta^3 + \eta^2 + (-C)\eta + 1 = 0 \quad (2f)$$

ここで、常数 C に注目する。(2d)式から(2f)式まで、簡単な積分と乗法であるが、常数 C に関する物理的な解釈を得るにはまだ至っていない。

(3) 三次方程式を解く

(2f)式は一般的な三次方程式である。波と流れが共存する開水路不等流の水面形基礎式を解くため、周期的な波状形を得る。位相面解析方法によると、三次方程式は三つ同じではない実根があれば、解いた三次方程式は周期的な波状形を得る。

しかし、三次方程式判別式 $D > 0$ であれば、三次方程式は3つの異なる実数解を持つ。 $D < 0$ であれば、一つの実数解と二つの互いに共役複素数解を持つ； $D = 0$ であれば、実数の重根を持つ。

(2f)式の判別式 D は(2g)で示す。

$$D = \frac{1}{27} (-43 + 36C + 4C^2 - 8C^3) \quad (2g)$$

$D>0$ なら、(2d)式は三つ実数解がある。あるいは
 $C>2.36$ であれば、(2d)式の三つ実数解はそれぞれ
 η_1, η_2, η_3 で表示する。

$\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ と置くと、(2d)式の解 $\eta(X_1)$ は(2h)式で表せる⁸⁾。

$$\eta(X_1) = \begin{cases} \eta_2 + (\eta_2 - \eta_3) \cosh^2\left(\frac{X_1 \sqrt{\eta_2 - \eta_1}}{2\sqrt{3}} \nu\right) & \text{for } \nu < 1 \\ \eta_2 + (\eta_2 - \eta_3) \operatorname{sech}^2\left(\frac{X_1 \sqrt{\eta_2 - \eta_1}}{2\sqrt{3}}\right) & \text{for } \nu = 1 \end{cases} \quad (2h)$$

ここに、 $\nu = (\eta_3 - \eta_2) / (\eta_2 - \eta_1)$ である。

4. まとめ

(1) (2a)式に対して、独立変数の定義域全体にわたり一様に成立する通常の摂動展開をすれば、永年項が出現する。そのため、緩やかな変化を表現するスケール X_1 を導入する方法で非線形方程式(2a)式を解析した。

(2) 本稿でフルード数と流れ方向の座標 X に対して摂動核を導入し、解析した。フルード数は1付近での解析を行うので、フルード数の摂動は $Fr = 1 + \epsilon$ になる；緩やかな変化を表現するスケール X_1 、無次元した流れ座標は $\xi = X + \epsilon X_1$ になる。

(3) 本稿では非静水圧を考慮した定在波を伴う開水路水面形の基礎方程式の非線形解析解は(2b)式で表示するが、右辺の第二項は微小振幅スケールで摂動核 ϵ の一次オーダーの水面形である。図-4は(2d)を積分する時に出てきた常数 $C(C=2.45, C=2.5, C=2.55)$ に関する、スケール X_1 と関係を示す図である。波状跳水の定在波波形である。(2g)式から C が2.36より大きければ、波状図を得る。図-4から見ると、 C について、波長や振幅は非常に異なる。 C が大きいほど、振幅は大きくなり、波長は小さくなる。

(4) (2e)式中の C は重要な意味があると言えるが本稿では C の意味はまだ分からない。 C は開水路河床に関する係数、せん断力に関する係数、あるいは、拡散に関する係数であると考えている。本稿では跳水の定在波を所在項を明らかにした上、 C の意味を検討して、砕波の発生するフルード数を得れば、図-3の波状跳水領域

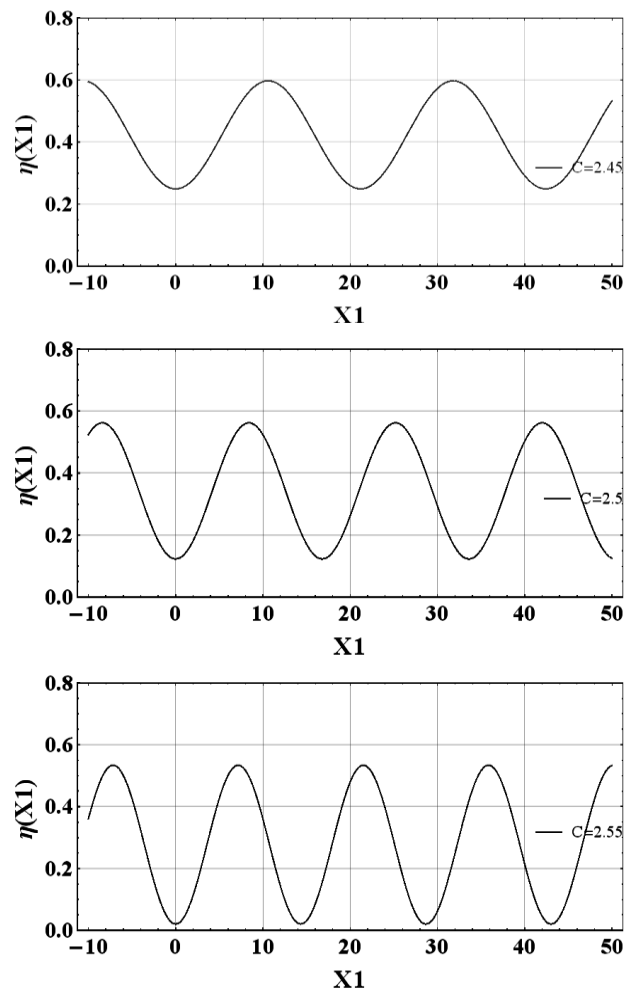


図-4 C により微小振幅スケールで定在波波形

域の間に、定在波と砕波を発生する境界線を書けると予想している。

参考文献

- 1) Iwasa, Y., Undular jump and its limiting condition for existence, Proc. of the 5th Japan National Congress for Applied Mech., pp.315~319, 1955.
- 2) Andersen, V.M., Undular hydraulic jump, Journal of Hydraulic Division, Proc. of ASCE, ASCE, 104(HY8), pp.1185~1188, 1978.
- 3) 銭潮潮, 山田正: 開水路断面の不均一性に起因する不等流の水面形成に関する基礎的研究, 水理科学, No.336 第58巻第1号, 2014.
- 4) 鬼束幸樹, 秋山寿一郎: 平坦河床上に発生する跳水の水面変動および底面圧力変動の特性, 応用力学論文集 Vol.10, 2007.
- 5) 日野幹雄: 明解水理学, 丸善出版.
- 6) 柴田正和: 漸近級数と特異摂動法, 森北出版.
- 7) Whitham, G.B.: Linear and Nonlinear Waves. John Wiley and Sons: 431-484, 1974.
- 8) H. Steinruck, Multiple Scales Analysis of the Turbulent Undular Hydraulic Jump, pp.197~219