51. 一般座標による分合流部の平面形状に適した計算点の配置手法について

吉武　央気[1]*・中土　紘作[1]・星野　剛[2]・安田　浩保[2]

[1]新潟大学大学院 自然科学研究科（〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050）
[2]新潟大学 災害・復興科学研究所（〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050）
＊E-mail: hiroki.yoshitake@tk.pacific.co.jp

本研究では，分合流部の平面形状を一般座標により境界適合した際の数値解析における精度低下の回避を目的に 2 種類の変換領域の型の座標変換に伴う打切り誤差の特性について考察を行った．分合流角度と本川と支川との川幅比の二つを変数とし，これらを組合せにより規定される分合流部の平面形状の計算点配置における打切り誤差を算定し，その結果，合流角や川幅比に応答して打切り誤差の大きさが大幅に変わることを明らかにした．計算点配置に由来する打切り誤差が抑制される分合流部の平面形状に適した変換領域の型の選択が重要であることを示した．

Key Words: *branching and merging channel, general coordinate system, truncation error*

1. はじめに

我が国の多くの都市は，越後平野，関東平野をはじめとする沖積平野に形成されている．そのような都市を貫流する河川は，山地から河口に至るまでの複数地点において合流と分流を繰り返す複雑な河道網を形成している．これらの分合流部の平面形状に着目すると，様々な分合流角や本川と支川の川幅の比率の形状になっていることが容易に確認できる．そのうえ，洪水時には分合流付近の河道において逆流や滞留といった複雑な水理現象が生じる．例えば，2011 年に発生した新潟・福島豪雨においては，信濃川とその支川の五十嵐川との合流部において逆流現象が生じていた事が明らかとなっている [1)]．このような複雑な水理現象を把握する手段としては分合流部を一体的に扱う数値解析による水理計算が最も有効である．

分合流部を一体に扱う水理計算の手法の一つとして，堤防に沿って効率的な計算点配置が可能な一般座標 [2)] を導入した平面二次元の水理計算法が挙げられ [3)]，これは最も普及した水理計算法である．それにもかかわらず，境界適合に一般曲線座標を導入した水理の数値解析では，解と同規模の計算点配置に依存した打切り誤差をしばしば生じて一意の解が得られないことはあまり知られていない．この背景としては，一般座標があらゆる計算点配置を理論的に許容するためと考えられる．しかし，このような計算点配置の自由度は数値解析においては打切り誤差の発生要因となり，場合によっては解に致命的な影響を与える．また，無限の自由度を有する一般座標の計算点配置は経験的な試行錯誤により行われることが多く，方程式を満足しない解の算定に直結する潜在的かつ看過できない問題である．

著者ら [4)] は，計算点配置の良否の理論的な判定手法を提案するとともに，計算点配置に由来する打切り誤差を抑制した計算点の配置手法を提案している．著者らの研究は分合流部を有さない単一の河道の計算点配置に対しては優れているものの，分合流部の計算点配置に伴う打切り誤差の緩和は考慮されていない．一般座標において分合流部の計算点は単連結型及び多重連結型の 2 種類 [5)] の変換領域の型からいずれかを選択し，配置する必要があるが，これらの変換領域の型がどのような打切り誤差を内在し，どちらが分合流部の計算点配置として優れているかについての理論的な見解は著者らの知る限り存在しない．

本研究では，分合流部の数値解析における精度低下の回避を目的に 2 種類の変換領域の型の座標変換に伴う打切り誤差の特性について考察を行い，分合流部の平面形状に適した計算点配置の方法がどのようなものであるかを考察する．

2. 計算点配置に由来する打切り誤差の抑制

(1) 打切り誤差

座標変換に伴う打切り誤差として式 (1)，(2) が得られることを Thompson ら [5)] は示している．

$$
\begin{aligned}
T_x = \frac{1}{2J}\,[&(y_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - y_\eta x_\xi x_{\xi\xi})\, f_{xx}\\
&+ (y_\xi y_\eta y_{\eta\eta} - y_\eta y_\xi y_{\xi\xi})\, f_{yy}\\
&+ \{y_\xi (x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta})
\end{aligned}
$$

$$-y_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\}\, f_{xy}\,] + O(\Delta\xi^3, \Delta\eta^3) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} T_y = \frac{1}{2J}\,[&(-x_\xi x_\eta x_{\eta\eta} + x_\eta x_\xi x_{\xi\xi})\, f_{xx} \\ &+ (-x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} + x_\eta y_\xi y_{\xi\xi})\, f_{yy} \\ &+ \{-x_\xi(x_\eta y_{\eta\eta} + y_\eta x_{\eta\eta}) \\ &+ x_\eta(x_\xi y_{\xi\xi} + y_\xi x_{\xi\xi})\}\, f_{xy}\,] + O(\Delta\xi^3, \Delta\eta^3) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで，x, y は物理面の座標，ξ, η は計算面の座標，両者の間には $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$，また $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ の対応関係があるものとする．T の下付き添字はベクトルの成分表記であり，x, y, f の下付き添字は微分を意味する．J は変換のヤコビアンで $x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ である．なお，式 (1), (2) は導出過程において 3 階微分項より高階の微分項を無視している．

Thompson らの打切り誤差を自然河川に適用することを考慮し，河道の流下方向に平行となる打切り誤差を式 (3)，流下方向と交差する河道の横断方向打切り誤差を式 (4) と変換した．また，式 (1), (2) は計算点の配置間隔の 1 次オーダーとなるため，打切り誤差を物理空間における計算点間隔と物理量の 2 階微分（f_{ii}, f_{jj}）で除して無次元化した誤差評価式を採用する [4]．これにより，計算点間隔の大小の影響を無視でき，計算点配置の良否のみを判別することが可能となる．

$$\begin{aligned} \mathbf{T_i} = \Bigg[&\begin{pmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \end{pmatrix} \cos^2\theta_i \\ &+ \begin{pmatrix} T_{x2} \\ T_{y2} \end{pmatrix} \sin^2\theta_i + \begin{pmatrix} T_{x3} \\ T_{y3} \end{pmatrix} \frac{\sin 2\theta_i}{2} \Bigg] f_{ii} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T_j} = \Bigg[&\begin{pmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \end{pmatrix} \cos^2\theta_j \\ &+ \begin{pmatrix} T_{x2} \\ T_{y2} \end{pmatrix} \sin^2\theta_j + \begin{pmatrix} T_{x3} \\ T_{y3} \end{pmatrix} \frac{\sin 2\theta_j}{2} \Bigg] f_{jj} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで，θ_i は x 軸と i 軸のなす角 であり，θ_j は x 軸と j 軸のなす角である．2 階微分値 f_{ii}, f_{jj} が存在する場合，f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} は以下のように記述できる．

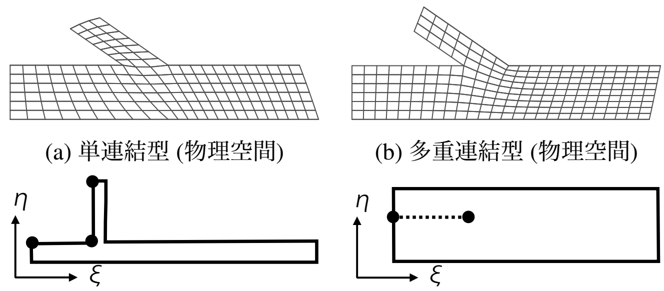
$$(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}) = (\cos^2\theta_i, \sin^2\theta_i, \frac{1}{2}\sin 2\theta_i) f_{ii} \quad (5)$$

$$(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}) = (\cos^2\theta_j, \sin^2\theta_j, \frac{1}{2}\sin 2\theta_j) f_{jj} \quad (6)$$

なお，式 (1) の f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} に関する項の係数はそれぞれ T_{x1}, T_{x2}, T_{x3} とし，式 (2) に関しても同様に T_{y1}, T_{y2}, T_{y3} とする．

(2) 打切り誤差の抑制法

Thompson ら [5] は楕円型偏微分方程式による計算点配置に由来する打切り誤差の緩和手法を提案している．次章以降の計算格子は次式に示すラプラス方程式によって作成し，打切り誤差の抑制を行った．



(a) 単連結型 (物理空間)　(b) 多重連結型 (物理空間)

(c) 単連結型 (計算空間)　(d) 多重連結型 (計算空間)

図–1 各計算領域による計算点配置

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (7)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (8)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (9)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (10)$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (11)$$

(3) 変換領域の型

分合流部における計算点配置の生成にあたり，変換領域の型として単連結型及び多重連結型の 2 種類が考えられる．単連結型とは領域内部に切れ目や空間等が存在しない変換領域であり，分合流部においては本川及び支川の流下方向座標軸が交差する．多重連結型とは変換領域内部に複数の切れ目や空間が存在する変換領域の型であり，本川及び支川の流下方向座標軸が交わらない．各変換領域の型による計算点配置を**図–1** に示す．

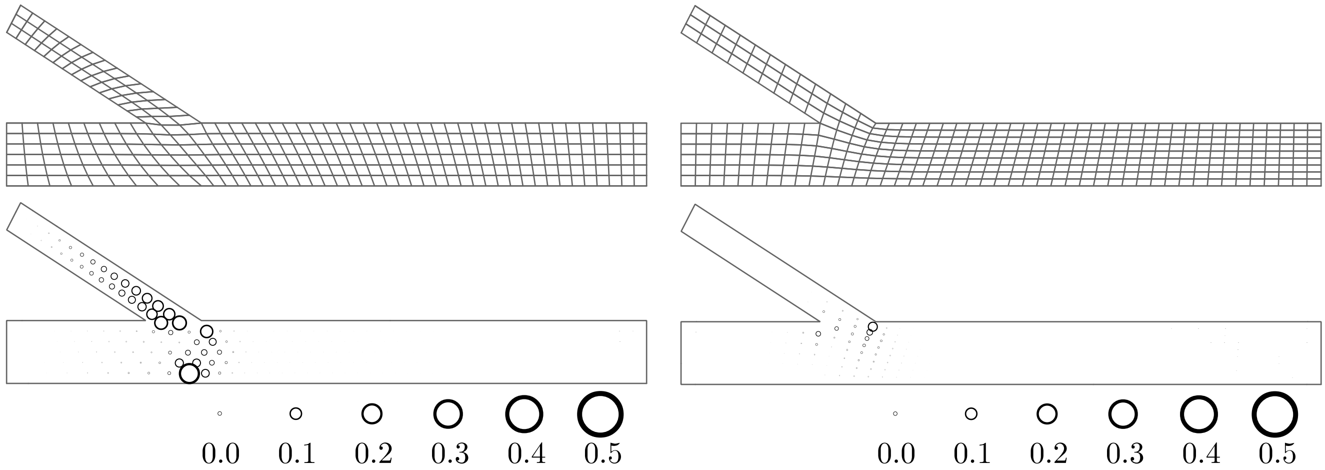
(4) 水理解析モデル

支配方程式は平面二次元の浅水流方程式を対象とする．一般座標系への変換は細田ら [3] と同様に流量フラックスをすべて一般座標反変成分とした．

3. 合流を伴う実験水路の水理解析

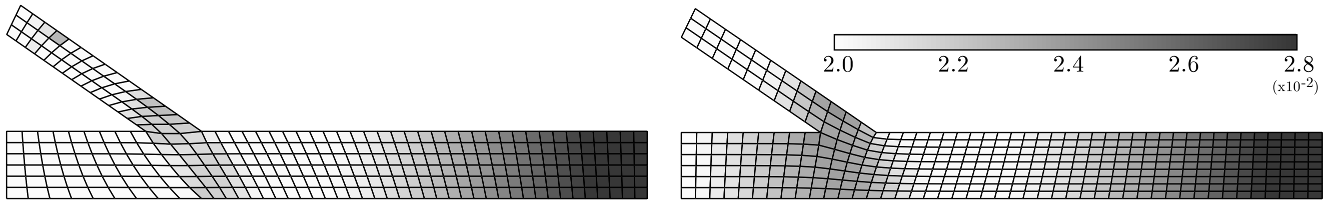
重枝ら [6] によって行われた合流を伴う実験水路に対して，単連結型及び多重連結型それぞれに基づき作成した計算点配置において水理解析を行い，解析結果と実験結果を比較することにより再現性を確認する．

実験装置は，**図–2** に示すような本川（長さ 8m ×幅 0.4m ×高さ 0.4m）と，支川（長さ 3.0m ×幅 0.2m ×高さ 0.3m）とで構成される水路である．本川と支川の織り成す合流角は 30°，本川と支川の水路床勾配は 1/200 に設定している．流入条件は，本川上流端に 2.625(l/s), 支川上流端に 0.875(l/s) である．



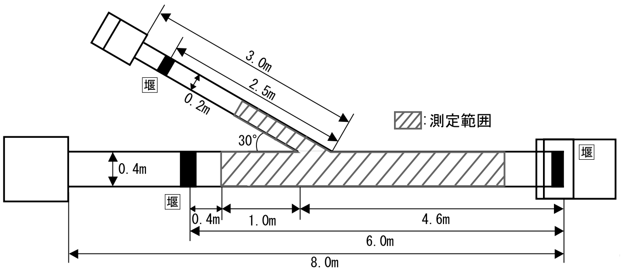
(a) 単連結型　　(b) 多重連結型

図–3 重枝らの実験水路の打切り誤差の比較

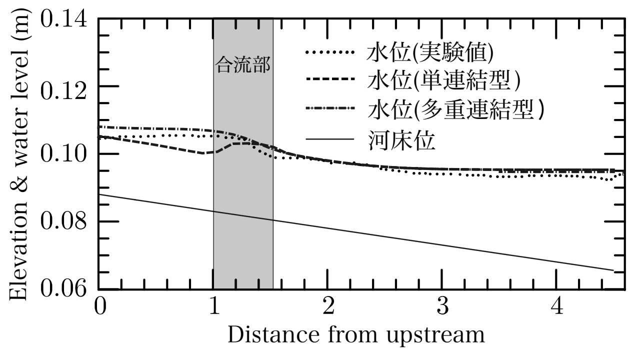


(a) 単連結型　　(b) 多重連結型

図–4 水深コンター図



図–2 重枝ら[6)] の合流を伴う実験装置

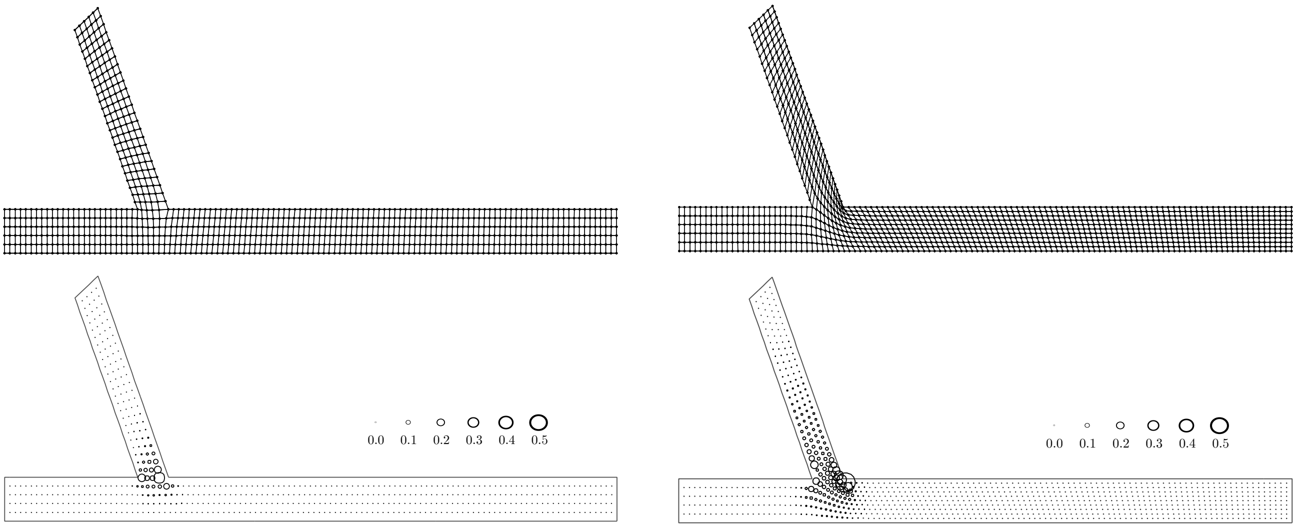


図–5 本川流心における水位・河床位縦断分布図

計算点は，格子幅を支川の川幅の 3 分割と設定し，前章のラプラス方程式により配置した．変換領域の型ごとの座標変換に伴う打切り誤差の算出結果を**図–3** に示す．合流部において多重連結型の方が単連結型に比べて打切り誤差が小さい結果であった．次に，水理解析結果として水深コンターを**図–4**，本川流心における水位・河床位の縦断分布を**図–5** に示す．合流部においては，打切り誤差が小さい多重連結型の方が単連結型よりも水理解析の再現性が良好であった．一方，再現性の低い単連結型においては 3 割程度水深が過小評価される結果であった．合流部下流においては，いずれの計算領域においても解析結果は同様であった．以上の結果より分合流部における水理を適切に把握するためには，計算の対象領域の平面形状に応じた計算点配置を用いることが重要であることが示された．

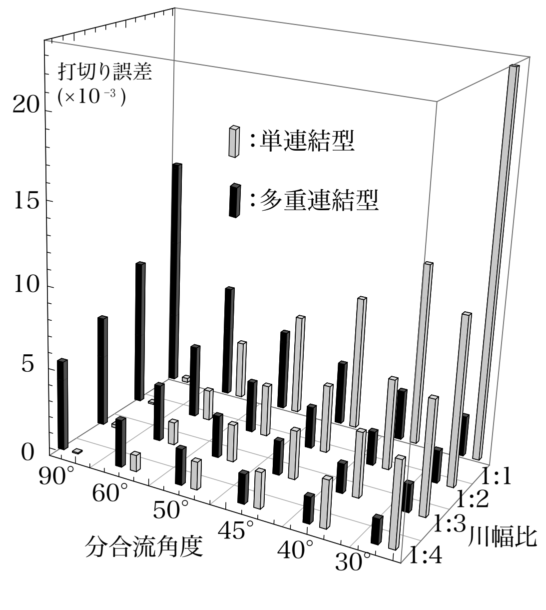
4. 分合流部の平面形状の座標変換における打切り誤差の考察

自然河川の分合流部における分合流角度と本川と支川の川幅比の組合わせは無数に存在する．ここでは，分合流角度及び川幅比を変数とし，これらの変数から規定される分合流部の平面形状と単連結型と多重連結型のそれぞれで座標変換した際の打切り誤差を算定し，ど



a) 単連結型　　　b) 多重連結型

図–7 打切り誤差の比較（分合流角度 60°，川幅比 1:1）



図–6 各計算領域に対する打切り誤差

ちらが適した変換領域の型であるかを考察する．

(1)　設定した条件の組合せ

分合流角度及び川幅比を変数とした分合流部の平面形状は，分合流角度は 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 90°の 6 段階，本川と支川の川幅比が 1 から 4 の整数倍となるように 4 段階にそれぞれ変化させたものを組合わせた 24 パターンとした．計算格子は前述のラプラス方程式を用いて作成した．格子間隔はいずれの平面形状ともに支川川幅に対して 5 分割とした．なお，分合流角度が 30°，本川と支川の川幅比が 1:2 のケースは，重枝ら 6) によって行われた実験水路と一致する．

(2)　分合流角度と川幅比に対する打切り誤差の応答

各変換領域の型において分合流角度及び川幅比を変数とし，座標変換に伴う打切り誤差の評価を行った結果を**図–6** に示す．同図に図示した打切り誤差は，全格子点における打切り誤差の平均値とした．また，各変換領域の型における打切り誤差比較結果の一例として**図–7** に分合流角度 60°，川幅比 1:1 のケースを示す．

分合流角度と川幅比を変数とした計算点配置の打切り誤差の分布は，分合流角に着目して計算点配置の違いを比較すると，分合流角度が小さいほど多重連結型の方が単連結型よりも打切り誤差は小さく，逆に分合流角度が 90° に近づくにつれて単連結型の方が多重連結型よりも打切り誤差が小さくなる傾向があることがわかる．川幅比に着目して計算点配置の違いを比較すると，単連結型と多重連結型のいずれとも川幅比が大きくなるほど打切り誤差は小さくなり，川幅比が 1:1 と 1:4 の場合で比較すると，1/3 程度小さくなることがわかった．川幅比の増加に伴う打切り誤差の減少の理由は，川幅比が大きいほどに計算点を滑らかに変化する配置が許容されるようになるためと考えられる．

(3)　自然河川の分合流形状に適した変換領域の型の選定方法

本川と支川の川幅がそれぞれに均一であることを仮定した分合流点に適した計算点配置は，分合流角だけを変数とするなら，45° 近傍が境界になって単連結型

と多重連結型の打切り誤差の大小関係が逆転し，本川と支川がほぼ直角に合流する場合は単連結型，ほぼ平行に合流する場合は多重連結型を選定することを基本とすれば良いことがわかる．しかし，川幅比も変数として加わると，どちらの計算点配置法ともに川幅比が大きくなるにつれて打切り誤差は小さくなるうえ，分合流角度の境界が一意となった単連結型と多重連結型の逆転関係は見られない．

このように打切り誤差の大きさは分合流角度と川幅比の両者に影響を受けて応答し，しかも本川と支川の川幅までもが縦断方向に変化するような自然河川の分合流点に適した変換領域の型を単純に類別することは容易ではない．上記までの考察を踏まえると，自然河川の分合流点に適した計算点配置の手順は，まず，打切り誤差を抑制した単連結型と多重連結型の２つで計算点配置を行い，打切り誤差を良否の判定指標として選定することが望ましいと言えよう．

5. おわりに

本研究では，まず，分合流角度が 30°で本川と支川の川幅比が 1:2の模型水路に対して単連結型と多重連結型の２種類の変換領域の型で計算点を配置し，計算点配置に由来する打切り誤差の算定と数値解析による水理計算を実施した．その結果，変換領域の型ごとに打切り誤差の大きさや再現性に違いが生じることが確認され，変換領域の型の選定が重要であることを示した．また，変換領域の型ごとに様々な分合流部の計算点配置における打切り誤差の比較を行い，分合流角や川幅比に応じてそれぞれの打切り誤差の大きさが大きく異なることを示した．得られた成果を踏まえると，試行錯誤によって計算点配置を決定することは得策とは言えず，境界適合の対象となる形状を単連結型と多重連結型のいずれともでまず計算点配置を行い，打切り誤差がより抑制されるどちらかの計算点配置の方法を採用することが現実的な選択肢と言える．

謝辞：本研究は，科研費基盤研究 (A)(代表者 山田正) および科研費基盤研究 (B)(代表者 木村一郎) からの支援を受けた．計算結果のデータ整理や図面作成において新潟大学工学部４年の大谷和さんと斉藤充紀君の熱心な助力を得た．ここに記して謝意を表します．

参考文献

1) 星野剛，小関博司，岡部裕馬，安田浩保：信濃川下流域河道網における河川の相互作用に着目した水理特性の把握，河川技術論文集，Vol.19, pp.289-294.
2) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会, 1994.
3) 細田尚，長田信寿，村本嘉雄：移動一般座標による開水路非定常流の数値解析，土木学会論文集，第 533号/II-34 pp.267-272,1996.
4) 星野剛，安田浩保：自然河川の水理解析における一般座標格子が有する打切り誤差の理論的評価とその緩和手法，土木学会応用力学論文集，第 16巻, pp.I 573-I 582,2013.
5) Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi and C. Wayne Mastin, Numerical Grid Generation Foundations and Applications, www.hpc.msstate.edu/publications/gridbook/, 1985.
6) 重枝未玲，秋山壽一郎，森山拓士：河川合流部での流れと河床の平面２次元解析，水工学論文集，第 53巻，pp.793-798, 2009.